线性代数与解析几何

## 第一章 矩阵及其初等变换

① m×n型矩阵：由m×n个数 $a_{ij}$ ( $i=1,2\dots m;\ j=1,2\dots n$ ) 所排成m行n列的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

简记为 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $A_{m\times n}$

行矩阵：$[a_1\ a_2 \dots a_n]$ 为避免混淆，往往记作 $[a_1,a_2,a_3,\dots,a_n]$ 用逗号隔开。

n阶矩阵：即n×n型矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}=A_{n\times n}$，又称n阶方阵

n阶矩阵中主对角线：$a_{11},a_{22}\dots a_{nn}$的连线；副对角线：从右上向左下的连线

对角元：主对角线上的元素

零矩阵：所有元素都为零的矩阵，记作O，$O_{m\times n}$：m×n型零矩阵

形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的方阵 叫作对角矩阵，可记为 $diag(a_{11},a_{22}\dots a_{nn})$ 也可简写为 $\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & \ddots\ a_{nn} \end{bmatrix}$

形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的方阵叫作上三角形矩阵。形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的矩阵叫作下三角形矩阵

单位矩阵：对角元均为1的对角矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots 1 \end{bmatrix}$，常用E,I表示。$E_n$或$I_n$表示n阶单位矩阵。

同型矩阵：若A与B的行数相同且列数相同。

② 矩阵的线性运算

1) 矩阵的加法 $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$ 即对应元素相加 (必须同型矩阵才可以加减法)

2) 矩阵的乘法 ① $kA=[ka_{ij}]_{m\times n}$

② 设 $A=[a_{ij}]_{m\times k}$ $B=[b_{ij}]_{k\times n}$ 则 $AB=C$，$C=[c_{ij}]_{m\times n}$ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj}$

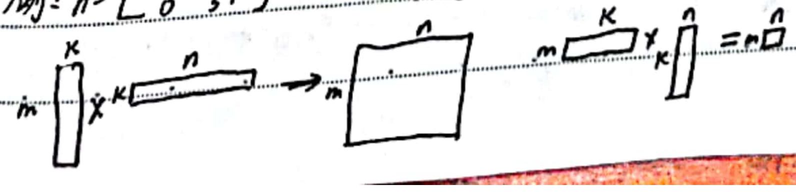
PS：只有当A的列数=B的行数时才可作乘法运算

即 $c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$
$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}$
$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}$

AB的行数=A的行数，B的列数

AB的(i,j)元等于A的第i行与B的第j行元素乘积之和.

例：$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 则 $A\times B=\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ 则 $BA=\begin{bmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 2 & 10 & 4 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$



1) 若 $AB=BA$ 则称 $A,B$ 可交换 （$A,B$ 是同阶对称矩阵，且 $AB$ 对称矩阵）（$A,B$ 相等 即 $A=B$，即 $A,B$ 所有元素相同）

2) 若 $A$ 经过有限次初等变换可变为 $B$，则称 $A,B$ 等价 $A\sim B$

3) 任何方阵经过有限次倍加初等行变换可以变为上三角矩阵

对于任何 $m\times n$ 型矩阵，一定能用初等变换化为形如 $F=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的矩阵，$F$ 为该矩阵的等价标准形。

4) $(A+B)^T=A^T+B^T$ $(AB)^T=B^TA^T$ $(kA)^T=kA^T$

$|AB|=|A||B|$ $|A^k|=|A|^k$

5) $\begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} k_1^{-1} & & \\ & k_2^{-1} & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n^{-1} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} & & & k_1 \\ & & k_2 & \\ & \cdots & & \\ k_n & & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & k_n^{-1} \\ & & \cdots & \\ & k_2^{-1} & & \\ k_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$

6) $|A|=0$ 则该矩阵为奇异矩阵

$|A|\neq 0$ 则该矩阵非奇异矩阵

7) 矩阵的内积与正交

内积 $\vec{\alpha}=[a_1,a_2,\ldots a_n]^T$ $\vec{\beta}=[b_1,b_2,\ldots b_n]^T$

$\vec{\alpha}^T\vec{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots a_nb_n$ 是 $\alpha\beta$ 的内积.

正交 当 $\vec{\alpha}^T\vec{\beta}=0$ 时 $\alpha,\beta$ 为正交向量.

正交向量组 $\vec{\alpha_i}^T\vec{\alpha_j}=\begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases}$ 时则 $a_1,a_2\ldots a_n$ 为标准/单位正交向量组

正交矩阵 $A^TA=E$ 则 $A$ 为正交矩阵

（$n$ 为 $n$ 阶方阵）

3) 矩阵乘法的运算法则

① 不满足交换律 $AB \neq BA$

原因：1) $AB$可相乘时，$BA$未必可相乘

2) $AB, BA$均可相乘，但结果类型不同

3) $AB, BA$结果类型相同，但对应元素不同

(若$AB=BA$，则称$A,B$可交换)

(当且仅当$A,B$同阶对称矩阵，且$AB$也对称矩阵时) $AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$

② 不满足消去律

1) $AB=0$ 无法推出$A=0$或$B=0$

2) $A\neq 0$ $AB=AC$ 无法推出 $B=C$

3) $A,B$均不是零矩阵，但$AB$可能为0矩阵.

(当矩阵$A$可逆时，满足消去律

若$A$可逆 $AB=0 \Rightarrow B=0$

$AB=AC \Rightarrow B=C$

$A$可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$)

$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$ 则 $AB=0$

$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}$ 则 $AB=0$ $AC=0$ 但 $B\neq C$.

③ 满足结合律和分配律

$(AB)C=A(BC)$

$A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$

④ 对于单位矩阵 (与数1在乘法中的作用相似)

$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$.

4) 矩阵的幂

$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$

$A^kA^l=A^{k+l}$

$(A^k)^l=A^{kl}$

但$(AB)^k\neq A^kB^k$

注 $(A+B)^2\neq A^2+AB+BA+B^2$

$(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$

当且仅当$A,B$可交换时 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

$(AB)^k=ABAB\cdots\cdots AB$

例 $A=[1,2,3]$ $B=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$ 则$AB$, $BA$和$(BA)^{30}$

$AB=7$

$BA=\begin{bmatrix}3&6&9\\-1&-2&-3\\2&4&6\end{bmatrix}$

$(BA)^{30}=B(AB)^{29}A=7^{29}\begin{bmatrix}3&6&9\\-1&-2&-3\\2&4&6\end{bmatrix}$

注：当$1\times1$型矩阵，只写数即可

注：同阶对角矩阵，只需将对角元对应相乘

同阶上三角矩阵乘积$AB$为上三角矩阵

$\begin{bmatrix}a_{11}&&\\&a_{22}&\\&&\ddots\\&&&a_{nn}\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}a_{11}^k&&\\&a_{22}^k&\\&&\ddots\\&&&a_{nn}^k\end{bmatrix}$

③ 线性方程组的矩阵形式

含有m个一次方程,n个未知数的方程组称为$m\times n$型线性方程组,简称$m\times n$型方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

则方程组可记为 $Ax=b$　　$A$为系数矩阵,$b$为常数向量

而由$A,b$合起来构成的矩阵称为增广矩阵　$[A,b]=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$

④ 矩阵的转置

1) 把$m\times n$矩阵的行列位置互换得到的$n\times m$型矩阵为$A$的转置矩阵,记为$A^T$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 则 \quad A^T=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2) 性质: $(A^T)^T=A$

$(A+B)^T=A^T+B^T$

$(kA)^T=kA^T$

$(AB)^T=B^TA^T$

$(A_1A_2\dots A_n)^T=A_n^TA_{n-1}^T\dots A_2^TA_1^T$

$(A^k)^T=(A^T)^k$

⑤ 对称矩阵与反对称矩阵

1) 设$A=[a_{ij}]_{n\times n}$,若$A^T=A$,则称$A$为对称矩阵　$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ 对称矩阵

若$A^T=-A$ 则称$A$为反对称矩阵　$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 反对称矩阵　$a_{ij}=-a_{ji}$ 对角线为0

2) ※若$A$为反对称矩阵,则对角元一定为0.

若$A,B$是同阶对称矩阵,且$AB$是对称矩阵 $\Leftrightarrow AB=BA$　$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

证: $A^T=A$　$B^T=B$　　$(AB)^T=B^TA^T=BA$　$AB=(AB)^T$

$\because AB$是对称矩阵　$\therefore (AB)^T=AB=BA$

H 例题:

① 判断:设 $A,B,C,E$ 皆为 n 阶方阵,则下列结论是否成立?

1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ (×) $A^2+AB+BA+B^2$

2) $(A+E)^2=A^2+2A+E$ (√) $AE=EA=A$

3) $(A+E)(A-E)=(A-E)(A+E)$ (√)

4) $(AB)^2=A^2B^2 \Leftrightarrow AB=BA$ (×) $ABAB=AABB$ 无法消去外围 $AB$ ∵矩阵不满足消去律

5) 若 $A^2=0 \Rightarrow A=0$ (×) $A=\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

6) 若 $A^2=A \Rightarrow A=0$ 或 $A=E$ (×) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

7) 若 $A^2=E \Rightarrow A=E$ 或 $A=-E$ (×) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

8) 若 $A$ 为对称矩阵 $\Rightarrow A^k$ 也为对称矩阵 (√) $A=A^T$ $(A^k)^T=(A^T)^k=A^k$

9) 若 $A$ 为反对称矩阵 $\Rightarrow$ 则 $A^k$ 也为反对称矩阵 (×) $A^T=-A$ $(A^k)^T=(A^T)^k=(-A)^k$ ∴需看 $k$ 的奇偶

② $A=\begin{bmatrix}1&3&0\\2&-2&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&-1\end{bmatrix}$ 且 $4(X-A)+B=2(X+B)-3A$ 求 $X$

$2X-A-B=0$

$X=\frac{1}{2}(A+B)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

③ 例10:设 $A$ 为 n 阶方阵,$E$ 为 n 阶单位矩阵 $B=\frac{A+E}{2}$,证 $B^2=B \Leftrightarrow A^2=E$

$B^2=\frac{1}{4}(A^2+2A+E)$

若 $B^2=B$ 则 $\frac{A+E}{2}=\frac{1}{4}(A^2+2A+E) \Rightarrow A^2=E$

同理若 $A^2=E$ 则 $B^2=\frac{A+E}{2}=B$

④ 例11:求与 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 所有可交换的矩阵

令 $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{bmatrix}$ $BA=\begin{bmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{bmatrix}$

∵可交换 ∴ $AB=BA$ $\begin{cases}a+c=a\\a+b=b+d\\c+d=d\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}c=0\\a=d\\b \text{ 任意}\end{cases}$

⑤ 例12:设 $A,B,C,D$ 皆为 n 阶方阵,且 $AB=CD$,则是否对任意 n 阶方阵 $X$,皆有 $AXB=CXD$。

不是 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ 则 $AXB \neq CXD$

$C=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ $CD=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

⑥ 例14:设 $A$ 和 $B$ 分别是 n 阶对称矩阵,反对称矩阵,$P$ 是 n 阶方阵,则

1) $P^TAP$ 是对称矩阵 $(P^TAP)^T=P^TA^TP=P^TAP$

2) $P^TBP$ 是反对称矩阵 $(P^TBP)^T=P^TB^TP=-P^TBP$

※性质 $A$ 为 n 阶方阵 $A+A^T$ 为对称矩阵 $A-A^T$ 为反对称

∴任何 n 阶方阵 = 一个对称矩阵 + 一个反对称矩阵

$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$

## 1.2 向量与分块矩阵

①向量是特殊的矩阵，矩阵是由向量构成的。

②黑体小写字母 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示列向量，$\vec{a}^T$, $\vec{b}^T$ 表示行向量。 （向量在未写明时均为列向量，$\vec{a}^T$, $\vec{b}^T$ 为行向量）

$\vec{e_i} \in R_n$ 表示第 i 个分量为 1，其余分量均为 0 的 n 元列向量，

例：$\vec{e_3} \in R_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

③分块矩阵 → 分块形成 单位矩阵，零矩阵，对角矩阵等形式

④运算性质

① A, B 同型且采用相同分块方式

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$　$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

则 $A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$

则 $KA = \begin{bmatrix} KA_{11} & KA_{12} \\ KA_{21} & KA_{22} \end{bmatrix}$

② 若 A 为 $m \times l$ 型矩阵　B 为 $l \times n$ 型矩阵

则 A 的列与 B 的行必须采用相同的分块方式。

③ 分块矩阵的转置：行变列且每一子块也要转置。 （外转+内转）

※⑤ 设分块矩阵 $A = [\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} \ldots \vec{a_n}]$　单位矩阵 $E = [e_1, e_2, e_3 \ldots e_n]$

则 $Ae_j$ 可表示 $\vec{a_j}$ 列向量（$Ae_j$ 表示 A 的第 j 列）　（行前列后）

$e_i^T A$ 可表示 $\vec{a_i}$ 行向量（$e_i^T A$ 表示 A 的第 i 行）　当 A 为 $m \times n$ 型矩阵时，仍使用 $Ae_j$, $e_i^T A$

$e_i^T A e_j$ 可表示 A 的 $(i,j)$ 元（$e_i^T A e_j$ 表示 A 的 $(i,j)$ 元）　$e_i^T A e_j$ 表示 A 的第 j 列、第 i 行、第 $(i,j)$ 元

例 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$　求 AB　求 $A^T$

$A = \begin{bmatrix} 2E & O \\ A_{21} & E \end{bmatrix}$　$B = \begin{bmatrix} B_{11} & E \\ O & B_{22} \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 2E & A_{21} \\ O & E \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 2B_{11} & 2E \\ A_{21}B_{11} & A_{21}+B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1-2 例题

①设 $a\in R^n$, $k=a^Ta\neq 0$, $A=E-aa^T$, $B=E+3aa^T$, $AB=E$ 求 $k$.

$$AB=E^2+2E\,aa^T-3aa^Taa^T$$
$$=E+(2-3k)aa^T=E$$
$$\therefore k=\frac{2}{3}$$

② 计算 $AB$

1) $A=\begin{bmatrix}-2&1&1&0\\1&-1&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&3\\0&0&2&-1\end{bmatrix}$

则 $A=\begin{bmatrix}A_{11}&E\\-E&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}E&-E\\0&B_{22}\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}A_{11}&-A_{11}+B_{22}\\-E&E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&1&2\\1&-1&1&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$

2) $A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&3\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\2&3&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

则 $A=\begin{bmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}B_{11}&0\\0&B_{22}\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}&0\\0&A_{22}B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&7&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&7\\0&0&1&3\end{bmatrix}$

③ 设 $A$ 是 $m\times n$ 型矩阵，且对任一n元向量 $x$ 都有 $Ax=0$，则 $A=0$ （✓）

$Ae_j=0$ $e_j$ 是n元向量 ∴列为0

1-3 矩阵的初等变换与初等矩阵

初等变换 $\begin{cases}\text{初等行变换}\\\text{初等列变换}\end{cases}$，但初等行变换计算时将用得多，列……行……列。

①线性方程组的初等变换（方程组解不变）
- ① 对调两行方程的位置 （对调） 对应矩阵的初等变换记作 $r_i\leftrightarrow r_j$ $c_i\leftrightarrow c_j$
- ② 用一个非零数乘某行方程的两边 （倍乘） $r_i\times k$ $c_i\times k$
- ③ 把一个方程的多少倍后加到另一行方程上去（倍加） $r_j+kr_i$ $c_j+kc_i$

row 是行 column 是列 /kɔləm/ transpose 转置

②如果矩阵A经过有限次初等变换可变成B，则矩阵A与B等价，记作 $A\sim B$

③用矩阵解方程组：把增广矩阵 $[A,b]$ 化为 $[E,C]$，则解为C

$Ax=b$

例2 $\begin{cases}x_2+2x_3=1\\x_1+x_2-x_3=0\\x_1-x_2+x_3=4\end{cases}$

$$[A,b]=\begin{bmatrix}0&1&2&1\\1&1&-1&0\\1&-1&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&1&2&1\\1&-1&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&-3&-1\\0&1&2&1\\0&0&6&6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+3r_3\\r_2-2r_3}]{r_3\div 6}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\quad\therefore x=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$$

※初等行变换解不变，但列变换解会变。（解方程组只允许用初等行变换）

④初等矩阵：由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵叫作初等矩阵。

（初等矩阵建立初等变换与矩阵乘法的联系）

1) 有3种
- ① 对调矩阵：将E的第i,j行/列对调，记作 $E_{i,j}$
- ② 倍乘矩阵：将E的第i行/列乘非零数k，记作 $E_i(k)$
- ③ 倍加矩阵：将E的第j行乘k加到第i行上，记作 $E_{i,j}(k)$

例 $E_{1,2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $E_2(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $E_{1,3}(k)=\begin{bmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

2) 初等矩阵的性质

① $E_{i,j}^T=E_{i,j}$

$E_i^T(k)=E_i(k)$

$E_{i,j}^T(k)=E_{j,i}(k)$

② $A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B \iff E_{i,j}A=B$

$A\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}B \iff AE_{i,j}=B$

$A\xrightarrow{r_i\times k}B \iff E_i(k)A=B$

$A\xrightarrow{c_i\times k}B \iff AE_i(k)=B$

$A\xrightarrow{r_j+kr_i}B \iff E_{j,i}(k)A=B$

$A\xrightarrow{c_j+kc_i}B \iff AE_{j,i}(k)=B$

行变换则左乘对应的初等矩阵
列变换则右乘对应的初等矩阵
（行前列后）

$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&6\\1&2&6\\1&2&6\end{bmatrix}$

③ $E_{i,j}E_{i,j}=E$ $\iff$ 第i行第j行来回对调两次

$E_i(k)E_i(k^{-1})=E$

$E_{i,j}(k)E_{i,j}(-k)=E$

3) 矩阵的等价标准形

① 任何方阵A经过有限次倍加行变换/倍加列变换都可形成上三角矩阵

② 对于任何m×n型矩阵，一定能用初等变换化为形如 $F=\begin{bmatrix}E_s&0\\0&0\end{bmatrix}$ 的矩阵

即存在m阶初等矩阵 $P_1,P_2\dots P_k$，n阶初等矩阵 $Q_1,Q_2\dots Q_l$ 使 $P_1P_2\dots P_kAQ_1Q_2\dots Q_l=F$

$F=\begin{bmatrix}E_s&0\\0&0\end{bmatrix}$ 叫作矩阵A的等价标准形。

例：$\begin{bmatrix}0&0&1&2\\2&1&1&3\\4&2&0&2\\2&1&0&1\end{bmatrix}$ 的等价标准形

$A\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\1&1&2&3\\0&2&4&2\\0&1&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[c_4-2c_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&1\\0&2&4&2\\0&1&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-2c_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

∴ A的等价标准形 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 

$E_s$：s即矩阵的秩，唯一。

习题1-3 ① $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ 2x_1+2x_3=4 \\ 3x_1+5x_2-x_3=0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 1&1&-1&2\\2&0&2&4\\3&5&-1&0\end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$ $\therefore x=\begin{bmatrix}3\\-2\\-1\end{bmatrix}$

② $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$

则 $B=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}A$

③ 对调矩阵A的i,j两列，用三次倍加一次倍乘化

$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ $\begin{cases} a_i \leftarrow a_i+a_j \\ a_j \leftarrow a_j-a_i=-a_i \\ a_i \leftarrow a_i+a_j \\ a_j \leftarrow -a_j \end{cases}$

④ $A \xrightarrow{r_3+2r_1} B \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} C$ 则 $\underline{E_{3,1}(2)}\, C\, \underline{E_{1,2}} = A$

如 $\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2]{r_2+r_1} \begin{bmatrix}1&7\\0&5\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{r_2+r_1}$ 表示2行加上1行.

1-4 矩阵的实际应用

例1:

| | 甲 | 乙 | 丙 |
|---|---|---|---|
| 原材料 | 10 | 20 | 30 |
| 人工 | 4 | 3 | 4 |
| 费用 | 1 | 2 | 3 |

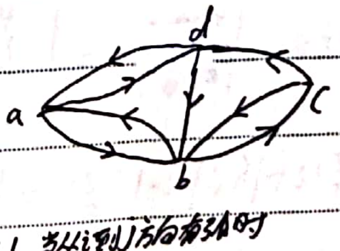
| 季度 | 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 450 | 500 | 500 | 450 |
| 乙 | 200 | 210 | 200 | 230 |
| 丙 | 380 | 400 | 410 | 400 |

∴表1-1, 1-2 可用矩阵 $A=\begin{bmatrix}10&20&30\\4&3&4\\1&2&3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}450&500&500&450\\200&210&200&230\\380&400&410&400\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}19900&21200&21300&21100\\3920&4230&4240&4090\\1610&1720&1720&1710\end{bmatrix}$

则AB表示 原材料 / 人工 / 费用 一 二 三 四 的费用.

例2: 有向图研究




某航空公司在4个城市a b c d 的航线图如图所示

则从c出发有几条经3次到d的路线

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ $a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当从i到j方向有路线时}\\ 0 & \text{当从i到j方向无路线时}\end{cases}$

$A=\begin{array}{c} \\ a\\b\\c\\d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}$

则 $\vec{a_1}=[0,1,0,1]$ 表示从a到b有航线, a到d有航线.

则 $\vec{a}_{13}^{(2)}=[0,1,0,1]\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=1$ 表示从a到c经两次飞的路线1条

则 $\vec{a}_{34}^{(3)}=$ A的第3行×A²第3列 = 3 ∴有3条路线 $A^2=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\0&2&0&2\\2&1&1&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$

# 第二章 方阵的行列式

（是方阵的数值特征）

①定义：设 $A=[a_{ij}]_{2\times2}$，则把 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 叫作方阵A的行列式，记作$|A|$或$\det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

则对于方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$　$x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$　$x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

②余子阵：从n阶方阵A中去掉$a_{ij}$所在的第i行第j列所余下的n-1阶方阵称为$a_{ij}$的余子阵，记作$A(i,j)$

例对于三阶方阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$，6的余子阵为$A(2,3)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

（设$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 则把形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的行列式称为行列式，把$\det(A)$或$|A|$称为行列式的表示的算式）

归纳：对于一阶方阵 $A=[a_{11}]$　$\det(A)=a_{11}$　　$=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}$

对于二阶方阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}(-1)^{1+1}\det(A(1,1))+a_{21}(-1)^{1+2}\det(A(2,1))=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

对于n阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}(-1)^{k+1}\det(A(k,1))=a_{11}(-1)^{1+1}A(1,1)+a_{21}(-1)^{1+2}A(2,1)+a_{31}(-1)^{1+3}A(3,1)$

$=a_{11}\det(A(1,1))-a_{21}\det(A(2,1))+a_{31}\det(A(3,1))\cdots\cdots$

余子式：把$a_{ij}$的余子阵$A(i,j)$的行列式称为$a_{ij}$的余子式，把$(-1)^{i+j}\det(A(i,j))$叫作$a_{ij}$的代数余子式，记作$A_{ij}$

$\therefore \det(A)=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$　　$A_{11}=(-1)^{1+1}\det(A(1,1))$　$A_{21}=(-1)^{2+1}\det(A(2,1))$

三阶行列式：方阵$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$　则$\det(A)=a_{11}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{13}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$

习题3-1　① 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$　求$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=6$

综上总结：$|A|$，$\det(A)$为A的行列式

$A(i,j)$ $A(2,3)$为A的余子阵

余子阵的行列式叫余子式

$A_{ij}$，$A_{23}$为$a_{ij}$的代数余子式

$A_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|=(-1)^{i+j}A(i,j)$

② 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$=-18+(-3)-12-2=-35$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-4\times4\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=256$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1+8-3\times5=-8$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=20+4+5=29$$

2-2 行列式的性质

性质1： $|A^T|=|A|$ 　故行列式对行成立的性质对列也成立.

性质2： 行列式$|A|$可按其任一列/任一行展开 $|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}$

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}$

推论1： 若方阵$|A|$某一行/某一列的元素全为0，则$|A|=0$

（设$\vec{a_j}$为A的第j个列向量，把向量$\vec{A_j}=[A_{1j};A_{2j},\dots A_{nj}]^T$称为$\vec{a_j}$的代数余子式向量，则$|A|=\vec{A_j}^T\vec{a_j}$

性质3： 若行列式某列/某行有公因式k，则可将k提到行列式外面

（线性） $|a_1,a_2\dots ka_j,\dots a_n|=k|a_1,a_2\dots a_n|$ 　$|KA|=K^n|A|$

若行列式某列/某行的元素都是两数之和的形式，则可拆分为两个行列式.

$|a_1,a_2\dots,a_j+b\dots a_n|=|a_1,a_2\dots a_n|+|a_1,a_2\dots b\dots a_n|$

例 $\begin{vmatrix}2a_{11}&3a_{12}&a_{13}\\2a_{21}&3a_{22}&a_{13}\\2a_{31}&3a_{32}&a_{13}\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 　注：行列式可提系数 矩阵不可以 $\begin{bmatrix}2a_{11}&3a_{12}&a_{13}\\2a_{21}&3a_{22}&a_{13}\\2a_{31}&3a_{32}&a_{13}\end{bmatrix}\neq6[a_{ij}]$

$\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&b_{12}\\a_{21}&b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11}&a_{12}\\b_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{vmatrix}$ 而 $\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$

性质4： 若方阵A中有两行/两列相同，则$|A|=0$ 　$|KA|=K^n|A|$

若方阵A中有两行/两列成比例，则$|A|=0$

若方阵A中有一行是另两行(列)的和 则$|A|=0$

性质5： 若对方阵A进行一次倍加变换得到B 则$|A|=|B|$，即倍加变换不改变行列式的值。 $\because a_2=a_j$ 则倍加列一行为0 $\therefore |A|=0$

证： $A=[a_1,a_2\dots a_n]\xrightarrow{c_j+kc_i}B=[a_1,a_2\dots a_j+ka_i,\dots a_n]$

$|B|=|a_1\dots a_n|+|a_1,a_2\dots ka_i\dots a_n|=|A|+0=|A|$

性质6： 若对方阵A进行一次对换行/列变换 得到B，则$|A|=-|B|$

$A=[a_1,a_2\dots a_n]\xRightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}B[a_1,a_2\dots a_j\dots a_i\dots a_n]$ 　$\begin{vmatrix}1&1&3\\3&3&1\\1&1&2\end{vmatrix}$

$|A|\xRightarrow{c_i+c_j}|a_1,a_2\dots a_i+a_j\dots a_j\dots a_n|$ 　$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ 　$1\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}$

$\xRightarrow{c_j-c_i}|a_1,a_2\dots a_i+a_j\dots -a_i\dots a_n|$ 　$=5+3-8=0$

$\xRightarrow{c_i+c_j}|a_1,a_2\dots a_j\dots -a_i\dots a_n|=-|B|$ 　初等行变换 对调 $|A|=-|B|$ 倍加 $|A|=|B|$ 倍乘 $|A|=k|B|$

性质7： 行列式某一行/列的每个元素乘以另一行(列)的对应元素的代数余子式之和等于0

$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\dots a_{ni}A_{nj}=0$ 　$(i\neq j)$

（…代数余子式一定与某一行的元素全…　$\therefore |B|=0$）

习题2.2　例1：若 $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ 是三元列向量 $|\alpha, \gamma_1, \gamma_2| = 1$　$|\beta, \gamma_1, \gamma_2| = 2$，则求 $|\alpha+\beta, \gamma_2, 2\gamma_1+\gamma_2|$

$$|\alpha+\beta, \gamma_2, 2\gamma_1+\gamma_2| = -|\alpha+\beta, 2\gamma_1+\gamma_2, \gamma_2|$$
$$= -2|\alpha+\beta, \gamma_1, \gamma_2| \quad (\text{倍加初等变换 } |A|=|B|)$$
$$= -2(|\alpha, \gamma_1, \gamma_2| + |\beta, \gamma_1, \gamma_2|)$$
$$= -6$$

例2：已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & w \end{vmatrix}$　求 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$

$\because A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34} = 1\times A_{31}+1\times A_{32}+1\times A_{33}+1\times A_{34}$

$=$ 第二行与第三行代数余子式相乘 $=0$　（由性质2-7）

思考题：①若对方阵A进行一次初等变换得到B，则 $|A|$ 与 $|B|$ 的关系？　解：若方阵A经过一次对调变换，则 $|A| = -|B|$

若方阵A经过一次倍乘变换 则 $|B| = k|A|$

若方阵A经过一次倍加变换 则 $|B| = |A|$

②若A，B为同阶方阵，判断下列说法正误？

1) $|A+B| = |A|+|B|$　　2) $|-A| = |A|$　　3) $|A|=0$ 则 $A=0$

(X) $[A+B] = [A]+[B]$　　(X) $|-A| = (-1)^n|A|$　　(X) $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

③ 初等矩阵 $|E_{ij}|$，$|E_i(k)|$，$|E_{ij}(k)|$ 的行列式为：　$1, k, 1$

练习题：1) 设三阶方阵A的列分块矩阵 $A = [a_1, a_2, a_3]$，$\det(A) = 2$，$B = [2a_1, a_1, -4a_3]$ 求 $\det(A+B)$

$A+B = [3a_1, a_1+a_2, -3a_3]$

$\det(A+B) = -9[a_1, a_2, a_3] = -18$

2) 已知 $|a_1, a_2, a_3| = 2$　求 $|3a_1 - a_2 + a_3, a_2 + 2a_3, a_3|$　$= |3a_1, a_2, a_3| = 3|a_1, a_2, a_3| = 6$

3) $|a_1, a_2, a_3, b_1| = m$　$|a_1, a_2, b_2, a_3| = n$，求 $|a_3, a_2, a_1, b_1+b_2|$

原式 $= -|a_1, a_2, a_3, b_1+b_2| = -(m-n) = n-m$

4) 证若A是奇数阶反对称矩阵，则 $|A|=0$　　$|A^T| = |-A| = (-1)^n|A| = -|A|$

$|A^T| = |A|$　性质1　$\therefore |A| = -|A| = 0$

提高题：① $A = [\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma]$　$B = [\eta, \beta, \gamma, \alpha]$　$|A|=1$　$|B|=2$　求 $|A+B|$

$A+B = [\varepsilon+\eta, \alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma]$
$= [\varepsilon+\eta, \alpha-\gamma, \beta+\gamma, \alpha+\gamma]$
$= [\varepsilon+\eta, 2\alpha, \beta, \gamma]$
$= 2(|\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma| + |\eta, \alpha, \beta, \gamma|)$
$= 6$

② 已知四阶行列式D中第3列的元素依次为 $-1, 2, 0, 1$

$\det(A) = \sum_{k=1} a_{ik}(-1)^{i+k}\det(A_{ik})$

1) 如果D的第3列元素对应余子式 $5, 3, -7, 4$，则D

2) 如果第4列元素的余子式依次为 $7, a, -7, 4$ 则a

① $D = (-1)(-1)^4 \cdot 5 + 2(-1)^5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)^7 \cdot 4 = -15$

② $(-1)(-1)^{1+4} \cdot 5 + 2(-1)^6 \cdot a + 1 \cdot (-1)^8 \cdot 4 = 0 \therefore a = -\frac{9}{2}$

2-3 行列式的计算

①上三角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则 $\det(A)=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \\ 0 & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & \\ & \ddots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

下三角矩阵同理 $\det(A)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ （∴上/下三角矩阵行列式=主对角线的乘积）

② 将行列式化为上三角矩阵求行列式

例：计算 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -11 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2,\ r_3\leftrightarrow r_4]{r_3+11r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{r_4-8r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{vmatrix}$

$\therefore \det(A)=-40$

③ 范德蒙德行列式

形如n阶方阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \\ x_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$ 的矩阵

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & x_4(x_4-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ 0 & x_2^2(x_2-x_1) & \cdots & & & \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & \cdots & \\ \cdots & & & & \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\cdot\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

④ 各行元素之和相等的行列式

$A=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & b \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{将第2至n列皆加到第一列}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第一行}]{\text{各行减}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b \\ 0 & a-b \\ 0 & 0 \\ \vdots & \ddots \end{vmatrix}$

$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$

⑤ 箭形行列式

$A=\begin{vmatrix} x & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到第一列}]{\text{将各列的}-\frac{c_{i-1}}{a_{i-1}}} \begin{vmatrix} x-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i c_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & & & \\ 0 & & a_2 & & \\ 0 & & & \ddots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(x-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i c_i}{a_i}\right)$

⑥递推法及三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}5&2&0&\cdots&0&0\\3&5&2&\cdots&0&0\\0&3&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&5&2\\0&0&0&\cdots&3&5\end{vmatrix}=5D_{n-1}-2\begin{vmatrix}3&2&\cdots&0&0\\0&5&2&\cdots&0&0\\0&3&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&5&2\\0&0&0&\cdots&3&5\end{vmatrix}=5D_{n-1}-6D_{n-2}$$

$$D_n-2D_{n-1}=3(D_{n-1}-2D_{n-2})=3^{n-2}(D_2-2D_1)=3^n$$

$$D_n=\begin{vmatrix}5&2&0&0&\cdots&0&0\\3&5&2&0&\cdots&0&0\\0&3&5&2&\cdots&0&0\\0&0&3&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&&5&2\\0&0&\cdots&&&3&5\end{vmatrix}=5D_{n-1}-3\begin{vmatrix}2&0&0&\cdots&0&0\\3&5&2&\cdots&0&0\\0&3&5&\cdots&0&0\\\cdots\end{vmatrix}=5D_{n-1}-6D_{n-2}$$

$$D_n-3D_{n-1}=2(D_{n-1}-3D_{n-2})=2^{n-2}(D_2-3D_1)=2^n$$

$\therefore D_{n-1}=3^n-2^n \quad \therefore D_n=3^{n+1}-2^{n+1}.$

习题2-3 ① 例：$\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}\xrightarrow{2r_2-r_1}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}$ (×) 倍乘后需除回来

$\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}\xrightarrow{2r_2}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&3\\2&4\end{vmatrix}$

② 对行列式初等变换：倍乘 提系数　　　矩阵初等变换有秩不变。

倍加 不变

对换 添负号

③ $\begin{vmatrix}1&1&0&1\\2&3&1&2\\0&5&5&3\\1&6&6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&1&0\\0&5&5&3\\1&5&6&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&5&0&3\\1&5&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&5&0&3\\0&0&1&0\end{vmatrix}=-3$

7) $\begin{vmatrix}0&1&-1&0\\5&3&4&2\\1&2&1&1\\2&-1&3&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\2&-1&3&-2\\0&1&-1&0\\5&3&4&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&-5&1&-4\\0&0&-\frac{4}{5}&-\frac{4}{5}\\0&-7&-1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&-5&1&-4\\0&0&-\frac{4}{5}&-\frac{4}{5}\\0&0&-\frac{12}{5}&\frac{13}{5}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&-5&1&-4\\0&0&-\frac{4}{5}&-\frac{4}{5}\\0&0&0&5\end{vmatrix}=20$

8) $\begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3\\1&b&b^2&b^3\\1&c&c^2&c^3\\1&d&d^2&d^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&b-a&b(b-a)&b^2(b-a)\\1&c-a&c(c-a)&c^2(c-a)\\1&d-a&d(d-a)&d^2(d-a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&b-a&0&0\\1&c-a&(c-b)(c-a)&(c-b)(c-a)c\\1&d-a&(d-b)(d-a)&(d-b)(d-a)d\end{vmatrix}=(b-a)(c-b)(c-a)(c-b)(d-b)(d-a)$

9) $\begin{vmatrix}1+s&1&1&\cdots&1\\2&2+s&2&\cdots&2\\3&3&3+s&\cdots&3\\\cdots\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+s&-s&-s&\cdots&-s\\2&s&0&\cdots&0\\3&0&s&\cdots&0\\\cdots\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}s+1+2+\cdots+n&0&0&0&0\\2&s&&&\\3&&s&&\\\vdots&&&\ddots&\\n&&&&s\end{vmatrix}=\left[s+\frac{n(n+1)}{2}\right]s^{n-1}$

2-4 分块三角形行列式及矩阵乘积的行列式

① 性质1：$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$

$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$

② 性质2：$|AB| = |A|\cdot|B|$ （若AB是同阶方阵）

③ 性质3：$|A^k| = |A|^k$ （A是方阵）

例题2-4：① 若 AB 为同阶矩阵 则 $|AB|=|BA|$ （✓） $|AB|=|BA|=|A||B|$

② $|AB| \neq |BA|$ 能否成立 （✓） AB不同阶方阵 例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

※ $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |AD|-|BC|$

③ $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$ （设 A, B分别m阶, n阶方阵）

例题 ① $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4$

② 设A是n阶方阵 且 $AA^T=E$，$|A|<0$，证 $|A+E|=0$

$|A+AA^T| = |A(E+A^T)| = |A(E+A)^T| = |A||E+A|$

$|A+E| = |A||E+A|$

$\therefore (1-|A|)|E+A|=0 \quad \because |A|<0 \therefore |A+E|=0$

③ 设A, B均为n阶方阵，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\cdot|A-B|$

$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix} = |A-B||A+B|$

① $A^{-1}=\frac{E}{A}$　　$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & & \\ \vdots & & \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$　　$A_{nn}=(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1\,1} \cdots a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}$

$AA^*=|A|E=\begin{vmatrix} |A| & & \\ & |A| & \\ & & |A| \end{vmatrix}$

$|A||A^{-1}|=|E|=1$　　$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$　　$|A^*|=|A|^{n-1}$　　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$|A|A^{-1}=A^*$　　$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$　　$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$　　$|A|^{-1}=|A^{-1}|$

$AA^{-1}=E$　　$A\frac{A^*}{|A|}=E$　　$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$　　$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

$|kA|=k^n|A|$

② 求$A^{-1}$的方法 $\begin{cases} Ax=E \quad x=A^{-1} \\ A^{-1}=\frac{A^*}{|A|} \quad AA^*=|A|E \quad A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{A}{E} \\ [A,E]\to[E,A^{-1}] \quad (与第一种本质相同) \end{cases}$　　$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

$|A^*|=A^{n-1}$.

③ $|A|=0$ 为奇异矩阵，$|A|\neq0$ 为非奇异矩阵 又叫可逆矩阵　　※ $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$

$|A|=0$ 则不可逆，$|A|\neq0$ 可逆矩阵　　$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

A为非奇异矩阵 ⟺ A可逆 ⟺ $|A|\neq0$ ⟺ A经初等变换可化为E　　(若A的秩不为n，则也化不成E，则$|A|=0$不可逆)

④ 相似矩阵：设A,B为n阶矩阵，若有n阶可逆矩阵P存在，使$P^{-1}AP=B$，则称A与B相似。

⑤ 若n阶矩阵A,B，满足$AB=0$，则$|A|=0$或$|B|=0$　　(√)　　若$|A|\neq0$ 则A可逆，则B为0矩阵，成立

⑥ 若A,B皆为可逆矩阵，则AB为可逆矩阵　　(√)　　$|A|\neq0$ $|B|\neq0$ $|AB|=|A||B|\neq0$.

⑦ $A=\begin{bmatrix} 2&1&0 \\ 1&2&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$　　$A^*BA=2A^*B+E$　　则$B=$____　　左乘A　$AA^*BA=2AA^*B+A$.　$|A|=3$

$|A|BA=2|A|B+A$

$B=\frac{1}{3}A[A-2E]^{-1}$

例：设A为四阶方程，$|A|=-3$，$|2A^*+5A^{-1}|=$____　　$|A||2A^*+5A^{-1}|=|2|A|E+5E|=|-E|=1$

⑧ 设A,B是三阶方阵，$|A|=2$，$|B|=3$　则$\begin{vmatrix} B & A \\ (3B)^{-1} & 0 \end{vmatrix}=$____　　列变换 m,n分别是$\begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix}$中A,C的阶数

$\therefore (-1)^{3\times3}\begin{vmatrix} \frac{1}{3}B^{-1} & 0 \\ B & A \end{vmatrix}=-|\frac{B^{-1}}{3}||A|=-\frac{2}{81}$

※ 设$A=[a_{ij}]_{3\times3}$是可逆矩阵　　$A_{ij}$是$a_{ij}$对应的代数余子式，并且$A_{ij}=2a_{ij}$　　证$AA^T=4E$

$A^*=2A^T$　　$|A|=0$ / $|A|=8$ 舍去

$|A^*|=|2A^T|=8|A|$　　$\therefore |A|=8$

$\therefore |A|^2=8|A|$　　$AA^T=\frac{1}{2}AA^*=\frac{1}{2}|A|E=4E$

⑨ 若A与B相似，则$|A|=|B|$　　A,B相似矩阵，存在n阶可逆矩阵P　$P^{-1}AP=B$　　$|A|=|B|$

若A与B等价，则$|A|$未必$=|B|$　　A经有限次初等行变换可得B

# 第三章 可逆矩阵及n×n型线性方程组

（三角形矩阵，行列式，对角形矩阵，可逆矩阵，若同阶矩阵必为方阵）

3-1 ①可逆矩阵是方阵 （$AB=BA=E$，故一定方阵）

②定义：对于n阶方阵A，存在n阶方阵B 使 $AB=BA=E$，则A叫作可逆矩阵，B叫作A的逆矩阵，否则A不可逆。

③定理：若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵唯一

（我们把A的逆矩阵记作 $A^{-1}$，读作"A的逆"。） ※ $A^{-1}\neq\frac{1}{A}$ $A^{-1}=\frac{E}{A}$

④性质 1）当A可逆时，矩阵的乘法满足消去律 （若A可逆 $Ax=B$ 则 $x=A^{-1}B$）

$$AX=AY \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}AY \Rightarrow X=Y,\quad AX=0 \Rightarrow X=0$$

2) $$\begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & k_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} k_1^{-1} & & & \\ & k_2^{-1} & & \\ & & k_3^{-1} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_n^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & k_1 \\ & k_2 & \\ k_n & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & k_n^{-1} \\ & & k_3^{-1} & \\ & k_2^{-1} & & \\ k_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$ 方向相同 ※

⑤伴随矩阵 （用于求逆矩阵）

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & & & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$ （转置过） $A^*$的第i行元素是A中第i列对应元素的代数余子式。

$$AA^*=A^*A=|A|E=\begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & |A| & \\ & & & \ddots & |A| \end{bmatrix}$$ $|A^*|=|A|^{n-1}$

$|A||A^{-1}|=1$ $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$|A|A^{-1}=A^*$ $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

$AA^{-1}=E$ $A\frac{A^*}{|A|}=E$ $AA^*=|A|E$

例：设方阵A为3阶方阵 $|A|=2$ 则 $|A^*+2A^{-1}|=$ ______

$$A(A^*+2A^{-1})=AA^*+2E=(|A|+2)E=4E$$ $4E=\begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{bmatrix}=4^3$

$$|A||A^*+2A^{-1}|=|4E|$$

$$|A^*+2A^{-1}|=32$$

（$AA^*=|A|E$ $|A||A^{-1}|=1$ $|A|A^{-1}=A^*$ $AA^{-1}=E$ $|A||A^*+2A^{-1}|=|AA^*+2E|=|4E|=4^3=2|A^*+2A^{-1}|$ ∴ $|A^*+2A^{-1}|=32$）

例：求方阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵

$|A|=-1$ $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3$ $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2$ $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2$

$A_{21}=-2$ $A_{22}=1$ $A_{23}=1$ $A_{31}=6$ $A_{32}=-3$ $A_{33}=-4$

$$\therefore A^*=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

⑥ 方阵A可逆的充要条件 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

判断方阵A可逆的两种方法 $\begin{cases} |A|\neq 0; \\ 找出方阵B使AB=E \end{cases}$

$|A||A^{-1}|=1 \quad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$|A|A^{-1}=A^* \quad A^{-1}=\frac{A^*}{|A|} \quad |A^*|=|A|^{n-1}$

$AA^{-1}=E \quad A^{-1}=\frac{E}{A} \quad A\frac{A^*}{|A|}=E$

例）方阵A满足 $A^2+A-E=0$，证 $A-2E$ 可逆，并求 $(A-2E)^{-1}$

$(A-2E)(A+3E)=A^2+A-6E=-5E$

$\therefore (A-2E)\cdot\left(\frac{A+3E}{-5}\right)=E \quad \therefore A-2E$ 可逆

且 $(A-2E)^{-1}=-\frac{A+3E}{5}$

⑦ 对于方阵A，当 $|A|=0$ 时，称A为奇异矩阵，当 $|A|\neq 0$ 时，A为非奇异矩阵。

$\therefore$ 可逆矩阵 $\Leftrightarrow$ 非奇异矩阵

若A可逆，则 $AA^T$ 可逆(×) 不对的

例：求 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ 可逆的条件，求 $A^{-1}$

$A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow ad-bc\neq 0.$

$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|} \quad A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$

例：求 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ 的逆矩阵

$|A|=-1 \quad A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$

$A_{11}=0 \quad A_{12}=(-1)^3\times 3=-3 \quad A_{13}=(-1)^4(4-2)=2$

$A_{21}=(-1)^3\times 1=-1 \quad A_{22}=(-1)^4\times(3-1)=2 \quad A_{23}=(-1)^5(1)=-1$

$A_{31}=1 \quad A_{32}=-1 \quad A_{33}=0$

$\therefore A^*=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix} \quad \therefore A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

⑧ 若A为n阶方阵 $|A^*|=|A|^{n-1}$

$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|} \quad A^*=|A|A^{-1}$

$|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}$

其它性质 $\begin{cases} (A^{-1})^{-1}=A \\ (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T \\ (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1} \\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \end{cases}$

※ A,B可逆，但 $A\pm B$ 未必可逆

$A\pm B$ 可逆，但A,B未必可逆 且 $(A\pm B)^{-1}$ 未必等于 $A^{-1}\pm B^{-1}$

⑨ 求逆矩阵的两种方法 $\begin{cases} A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|} \\ \text{初等行变换法} \end{cases}$

1) 初等矩阵的可逆矩阵 $E_{i,j}^{-1}=E_{i,j}$ （$E_{i,j}E_{i,j}=E$ 两次对调复换）

$E_i(k)^{-1}=E_i(k^{-1})$ （$E_i(k)E_i(k^{-1})=E$ ）

$E_{i,j}(k)^{-1}=E_{i,j}(-k)$ （$E_{i,j}(k)E_{i,j}(-k)=E$ ）

2) 可逆矩阵的等价标准形单位矩阵 A可逆，则 $|A|\neq0$ $\therefore A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

故方阵A可逆 ⟺ A与E等价

3) $m\times n$ 阶矩阵A与B等价条件：存在m阶可逆矩阵P，n阶可逆矩阵Q 使 $PAQ=B$，则AB等价。

$[A,E]\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}}[E,B]$，则 $B=A^{-1}$

$\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等列}}\begin{bmatrix}E\\B\end{bmatrix}$ 则 $B=A^{-1}$

例：求 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1}$

$[A,E]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\2&2&3&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&0&1&-2&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&3&-2&1\\0&0&1&-2&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&3&-2&1\\0&0&1&-2&1&0\end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\3&-2&1\\-2&1&0\end{bmatrix}$

例：设A，B都是n阶可逆矩阵，证 $\begin{bmatrix}A&C\\0&B\end{bmatrix}$ 可逆 并求其逆矩阵.

A，B可逆 $\therefore |A|\neq0\ |B|\neq0$

$\begin{vmatrix}A&C\\0&B\end{vmatrix}=|A||B|\neq0$ $\therefore\begin{bmatrix}A&C\\0&B\end{bmatrix}$ 可逆

$\begin{bmatrix}A&C\\0&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&0\\0&E\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{bmatrix}AX_1+CX_3&AX_2+CX_4\\BX_3&BX_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&0\\0&E\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{cases}X_1=A^{-1}\\X_2=-A^{-1}CB^{-1}\\X_3=0\\X_4=B^{-1}\end{cases}$ $\therefore\begin{bmatrix}A&C\\0&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\0&B^{-1}\end{bmatrix}$

⑩ 矩阵方程 $AX=C \Rightarrow [A,C]\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}}[E,X]$ （前提A，B可逆）

$YB=C \Rightarrow \begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等列}}\begin{bmatrix}E\\Y\end{bmatrix}$

例 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}6&3\\3&2\\1&2\end{bmatrix}$ $AX=2X+C$ 求X

$(A-2E)X=C$

$|A-2E|\neq0$ $\therefore$ 可逆 $[A-2E,C]=\begin{bmatrix}0&1&1&1&6&3\\1&0&0&0&3&2\\1&0&-1&-1&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_2+r_3\\r_3\times(-1)}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&4&3\\0&0&1&2&0\end{bmatrix}$

$\therefore X=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\\2&0\end{bmatrix}$

PS：若不能 $AX=C$ $YB=C$ 如 $\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}X=X\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$ 则设 $X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$ 解 $X=\begin{bmatrix}-1&1\\2&4\end{bmatrix}$

题3-1 1) 若三阶矩阵ABC满足 $AB=CA=E$，则 $B=C$ (√) $\because AB=CA=E$ $\therefore A$可逆

2) 若 $AB=0$ 且A可逆，则 $B=0$ (√) $\because A,B,C$是n阶矩阵 $\therefore B,C$是A的逆矩阵 $\therefore A^{-1}AB=0$ $\therefore B=0$.

3) 若A可逆 且 $AX=YA$ 则 $X=Y$ (×) A位置不同 $X=A^{-1}YA$

4) 若A可逆，且 $XA=C$ 则 $X=A^{-1}C$ (×) $X=CA^{-1}$

5) 若AB可逆，则A,B均可逆 (×) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

6) 若 $A^TA$ 可逆，则 $AA^T$ 也可逆 (×) (若A,B为方阵 则正确) $A^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

7) 若对称矩阵A可逆，则 $A^{-1}$ 也对称 (√) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T=A^{-1}$

※ 8) 若 $A^*=0$ 则 $A=0$ (×) $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

9) A与 $A^*$，A与 $A^{-1}$ 均可交换 (√) 可交换即 $AB=BA$ $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ $A\frac{A^*}{|A|}=E$

题3-1: ① 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$kE-A$ 是非奇异矩阵，求k

$\because kE-A$是非奇异 $\therefore |kE-A|\neq 0$ $\therefore k\neq 5$且$k\neq -1$.

② 求下列矩阵逆矩阵

$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&-1&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&3&-2\\2&1&-3\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}1&-3&0&0\\2&5&0&0\\0&0&2&3\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$

1) $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$ $|A|=1$ $A^*=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\-4&3&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}$ $\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\-4&3&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}$

2) $B^{-1}=\frac{B^*}{|B|}$ $|B|=-7-2\times(-2)+2\times1=-1$ $B^*=\begin{bmatrix}-7&2&1\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}$

$\therefore B^{-1}=\begin{bmatrix}7&-2&-1\\-2&1&0\\4&-1&-1\end{bmatrix}$

或 $[B,E]=[E,B^{-1}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\2&3&-2&0&1&0\\2&1&-3&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-2&-1\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&4&-1&-1\end{array}\right]$

3) $C^{-1}=\begin{bmatrix}5&3&0&0\\-2&-1&0&0\\0&0&1&-3\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$ $D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac14&\frac14&\frac14&\frac14\\\frac14&\frac14&-\frac14&-\frac14\\\frac14&-\frac14&\frac14&-\frac14\\\frac14&-\frac14&-\frac14&\frac14\end{bmatrix}$

③ 设A,B为三阶方阵 $|A|=2$ $|B|=3$ 则

1) $|2(A^*B^{-1})^2A^T|$ 2) $|2A^*+3A^{-1}|$

3) $|(4A)^{-1}-A^*|$ 4) $\begin{vmatrix}0&-B\\(2A)^{-1}&0\end{vmatrix}$

※ $|AB|=|A||B|$

$|A^*|=|A|^{n-1}$

$|A^T|=|A|$

$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

$A^*=|A|A^{-1}$

① $|2(A^*B^{-1})^2A^T|=8|A^*|^2|B^{-1}|^2|A^T|$

$=8|A|^5|B|^{-2}$

$=\frac{256}{9}$

② $|2|A|A^{-1}+3A^{-1}|=|7A^{-1}|=7^3|A|^{-1}=\frac{343}{2}$

③ $|\frac14A^{-1}-|A|A^{-1}|=|-\frac74A^{-1}|=(-\frac74)^3|A|^{-1}=-\frac{343}{128}$

④ $(-1)^{3\times3}\begin{vmatrix}-B&0\\0&(2A)^{-1}\end{vmatrix}=(-1)|-B||\frac12A^{-1}|$
$=\frac18|B||A|^{-1}=\frac{3}{16}$

④ 设 $A=\begin{bmatrix}5&1&0\\1&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$ABA^*=2BA^*+E$ 求|B|

$(A-2E)BA^*=E$ $|A-2E|=\begin{vmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=-8$

$|A-2E||B||A|^2=1$ $|A|=24$ $\therefore |B|=-\frac{1}{4608}$

⑤ 证若A为n阶方阵且 $A^k=0$ 则 $E-A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\dots A^{k-1}$ $(E-A)(E+A+A^2+\dots A^{k-1})=E$ ∴√

$|A|=0$ 奇异矩阵 $|A|\neq0$ 非奇异矩阵 $(E-A)(E+A+\dots A^{k-1})=E+A+A^2+\dots A^{k-1}-A-A^2-\dots-A^k$
$=E-A^k=E$ $\therefore E-A$可逆

⑥证：若 $A^2=E$ 且 $A\neq E$，则 $|A+E|=0$

反证法：设 $|A+E|\neq 0$ 则 $A+E$ 可逆 ∵ $A^2=E$ $(A+E)(A-E)=A^2-E=0$

∵ $A+E$ 可逆 ∴ 消去 $A+E$ ∴ $A-E=0$ ∴ $A=E$ ∵ 与假设矛盾 ∴ $|A+E|=0$

⑦证：若 $A$ 和 $B$ 是非零的 n 阶方阵，且 $AB=0$，则 $A$、$B$ 不可逆.

假设 $A$ 可逆 ∵ $AB=0$ ∴ $B=0$ ∵ 非零方阵 ∴ 矛盾.

⑦证：若 $A$ 可逆且 $A^2+AB+B^2=0$ 则 $B$, $A+B$, $AB$ 可逆

$AB+B^2=(A+B)B=-A^2$.

$|(A+B)\cdot B|=|A+B||B|=|-A^2|$ ∵ $A$ 可逆 ∴ $|A^2|\neq 0$ ∴ $|A+B||B|\neq 0$ ∴ $A+B$, $B$ 可逆

∵ $A$ 可逆，$B$ 可逆. ∴ $AB$ 可逆

⑧若 $C$ 可逆，且 $C^{-1}=(C^{-1}B+E)A^T$ 则 $A$ 可逆且 $A^{-1}=(B+C)^T$ · $E=C(C^{-1}B+E)A^T=(B+C)A^T$

转置 $A(B+C)^T=E^T=E$ ∴ $A^{-1}=(B+C)^T$

⑨若 $A$, $B$, $A+B$ 均可逆，则 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆。 $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$ ∴ $A$, $A+B$, $B$ 可逆 则 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆

⑩若 $A$ 为 n 阶方阵，则 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$

⑪若 $AB=A+B$ 则 $A-E$ 与 $B-E$ 都可逆 $(A-E)(B-E)=AB-B-A+E=E$

∴ $(A-E)^{-1}=B-E$.

⑫若 $A$ 与 $B$ 可逆，则 $\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}|B|A^*&0\\0&|A|B^*\end{bmatrix}$ $A^*=|A|A^{-1}$

∴ $\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}A&0\\0&B\end{vmatrix}\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}^{-1}$

$=|A||B|\begin{bmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|B|A^*&0\\0&|A|B^*\end{bmatrix}$

提高题3-1：①设 $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ $A^*=A^T$ $A\neq 0$，求 $|A|$.

$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ $A^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}$

$|A^*|=|A|^2=|A^T|=|A|$ ∴ $|A|=0$ 或 $1$

$AA^*=|A|E$ $AA^T=|A|E$ ∴ $AA^T=\begin{bmatrix}a_{11}^2&&\\&a_{22}^2&\\&&a_{33}^2\end{bmatrix}$ ∵ $A\neq 0$ $|A|=a_{11}^2=a_{22}^2=a_{33}^2$

∴ $|A|=1$.

3-2 n×n型线性方程组

① n×n型齐次线性方程组 $Ax=0$

当A可逆 则x有零解 $A^{-1}Ax=0 \Rightarrow x=0$ 　　|A|≠0则A可逆

当A不可逆 则x有非零解 　　|A|=0则A不可逆

例 $\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+kx_3=0 \end{cases}$

k为何值 ①只有零解 ②有非零解

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ k+2 & k & 1 \\ k+2 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$=(k+2)(k-1)^2$

∴当k=-2或k=1时 |A|=0 有非零解

当k≠-2且k≠1且 |A|≠0 仅零解。

② n×n型非齐次线性方程组 $Ax=b$

非齐次线性方程组有唯一解 ⟺ |A|≠0，此时 $x=A^{-1}b$

克拉默法则 $x_i=\frac{|B_i|}{|A|}$ 　$B_i$为把A中第i列换为b所得的矩阵

例：用克拉默法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=5 \\ x_1+2x_2+3x_3=3 \end{cases}$$

① $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-2+1=-1$ 　　∴ $x_1=\frac{|B_1|}{|A|}=2$

$x_2=\frac{|B_2|}{|A|}=-1$

$|B_1|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-2$ 　　$x_3=\frac{|B_3|}{|A|}=1$

$|B_2|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=1$

$|B_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-1$

② $[A,b]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_3-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1-r_3]{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

∴ $x=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

③ $x=A^{-1}b$ 　$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 　∴ $x=A^{-1}b=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

三种求线性方程组的方法 $\begin{cases} \text{克拉默法} \\ \text{逆矩阵法} \\ \text{初等行变换法.} \end{cases}$

第五章 向量组的线性相关性与矩阵的秩。

5-1 向量组的线性相关性与秩

① $m\times n$ 型线性方程组矩阵形式 $Ax=b$

② 定义：对于向量组 $A=[a_1,a_2\ldots a_n]$ 存在 $n$ 个数 $[k_1,k_2\ldots k_n]$ 使得 $b=k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n$ 则称 $b$ 能由向量 $a_1\ldots a_n$ 线性表示。

$\therefore$ $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ 向量 $b$ 能由向量组 $A$ 线性表示

$Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 向量 $b$ 能由向量组 $A$ 线性表示，且表达式唯一。

③ 向量组的线性相关性

$|A|=0$ 则矩阵 $A$ 不可逆 $\quad AA^{-1}=E$

$AA^*=|A|E$

$A^*=|A|A^{-1}$，$\quad A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

方阵：$|A|=0 \Rightarrow$ 线性相关

非方阵：看秩 { 初等变换不改变矩阵的秩，三秩相等，矩阵可逆相等

定义：$Ax=0 \Leftrightarrow a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$

当存在 $n$ 个不全为0的数 $k_1,k_2\ldots k_n$，使 $k_1a_1+k_2a_2+\ldots k_na_n=0$ 成立 则称向量组 $A$ 线性相关。

当且仅当 $k_1,k_2\ldots k_n$ 全为0时，$k_1a_1+\ldots+k_na_n=0$ 成立，则称向量组 $A$ 线性无关

推论定理 $\Rightarrow$ { 向量组 $A$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $|A|=0$ $\Leftrightarrow$ 奇异矩阵一定线性相关

向量组 $A$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 仅零解 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 可逆矩阵一定线性无关

推论 $\Rightarrow$ $a_1,a_2\ldots a_n$ 线性相关，则表示其中任意一个向量可由其它 $n-1$ 个向量表示。

※ $|A|=0$，则 $A$ 一定线性相关，$|A|\neq 0$，一定线性无关

可逆矩阵 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow$ 线性无关

④ 向量组的秩与极大无关组 （秩的本质组成矩阵线性无关的向量组个数）

① 在向量组中，若含有 $r$ 个向量的子向量组线性无关，并且含 $r+1$ 个向量的子向量一定线性相关，则 $r$ 为向量组的秩，该 $r$ 个向量为 $V$ 的极大无关组

② { 向量组 $V$ 线性无关，则它的秩 = 其所含向量数

向量组 $V$ 线性相关，则它的秩 < 其所含向量数

（初等变换不改变矩阵的秩）

（仅含零向量的向量组的秩为0，无极大无关组）

③ 求 $a_1=[1,1,3]^T$ $a_2=[1,0,2]^T$ $a_3=[0,1,1]^T$ $a_4=[2,1,5]^T$，则它的秩 2

$$\begin{bmatrix}1&1&3\\1&0&2\\0&1&1\\2&1&5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ $\therefore$ 秩为2

A为m×n阶矩阵

① $0 \le r(A) \le \min\{m,n\}$

② $r(kA) = r(A) \quad (k \ne 0)$

③ $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$

④ $r(A+B) \le r(A) + r(B)$

⑤ $r(A^*) = \begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$

⑥ $r(A) = r(AA^T) = r(A^T)$

※※※ 设矩阵A为m×k型矩阵，矩阵B为k×n型矩阵，则

1) $\begin{cases} r(A) \ge r(AB) \\ r(B) \ge r(AB) \end{cases}$

$r(A) = r([A, 0])$

$[A, 0]\begin{bmatrix} E_k & B \\ 0 & E_n \end{bmatrix} = [AE_k, AB] = [A, AB]$

$\because r(A) = r(AQ) = r(PA) = r(PAQ)$

满可逆矩阵，数矩阵 $\begin{bmatrix} E_k & B \\ 0 & E_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \\ & \cdot \end{bmatrix}$ 上三角矩阵
可逆

$\therefore r(A) = r([A,0]) = r\left([A,0]\begin{bmatrix} E_k & B \\ 0 & E_n \end{bmatrix}\right) = r(A, AB) \ge r(AB)$

2) $r(A) + r(B) \le r(AB) + k$

$r(A) + r(B) \le r\begin{bmatrix} A & 0 \\ E_k & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A-AE_k & 0-AB \\ E_k & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & -AB \\ E_k & 0 \end{bmatrix} = r(AB) + k$

3) 设A为m×n，B为m×k

则 $r[A, B] \le r(A) + r(B)$

$r[A,B] = r\left([E,E]\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) \le r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$

$r(A,B) \le r(A)$ 或 $r(B)$.

4) 设A B均为m×n

$r(A+B) = r\left([A,B]\begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix}\right) \le r[A,B] \le r(A) + r(B)$

5-1 例题 ① $a_1=[1,0,0,k]^T$ $a_2=[1,k,0,0]^T$, $a_3=[0,1,1,0]^T$ $a_4=[0,0,k,1]^T$, $k=$___时线性无关

$\begin{vmatrix} 1&0&0&k \\ 1&k&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&k&1 \end{vmatrix} \neq 0$ 时线性无关

$k\neq 0$ 且 $k\neq 1$

② 记 $e_1,e_2 \dots e_n$ 线性无关, 且任意 $b\in R^n$ 可由 $e_1,e_2 \dots e_n$ 线性表示 $|e_1,e_2 \dots e_n|=|E|=1\neq 0$ ∴无关.

$b=b_1e_1+b_2e_2+\dots b_ne_n$

5-2 矩阵的秩

① 三秩相等 $\begin{cases} r(A)=r(A^T) & \text{矩阵转置后秩不变} \\ r(A)=A\text{的行秩}=A\text{的列秩} & \text{矩阵行秩}=\text{列秩} \end{cases}$

② 设 $A$ 为 $m\times n$ 矩阵, $P$, $Q$ 分别为 $m$ 阶, $n$ 阶可逆矩阵

则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$ (即初等变换不改变矩阵的秩, 矩阵乘可逆矩阵不改变矩阵的秩、)

③ 求矩阵的秩, 可变换为最简形 $\begin{bmatrix} 1&1&0 \\ 0&2&2 \\ 0&0&5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$ ∴秩为3.

④ $r\begin{bmatrix} A&0 \\ 0&B \end{bmatrix}=r(A)+r(B)$ 若 $A$ 的秩为 $r$ 则 $A$ 与 $F=\begin{bmatrix} E_r&0 \\ 0&0 \end{bmatrix}$ 等价

$r\begin{bmatrix} A&C \\ 0&B \end{bmatrix}\geq r(A)+r(B)$ $A,B$ 可能不会 $\begin{bmatrix} 1&0 \\ 0&0 \end{bmatrix}$

⑤ 满秩矩阵: 当 $A$ 为 $n$ 阶方阵, 且 $r(A)=n$ 时, $A$ 为满秩矩阵。

$A$ 为满秩矩阵 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $A$ 为非奇异矩阵 $\Leftrightarrow$ $A$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 仅零解 $\Leftrightarrow$ $Ax=b$ 唯一解.

5-2 例题 若 $r(AB)=r(B)$ 则 $A$ 可逆 (X) 当 $A=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ 时

设 $A$ 为 $n$ 阶方阵 $r(A^*)=\begin{cases} n & \to r(A)=n \\ 1 & \to r(A)=n-1 \\ 0 & \to r(A)\leq n-2 \end{cases}$

$|A^*|=|A|^{n-1}$

$r(A)=n$ 时 $|A|\neq 0$ $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$ $r(A^*)=n$

当 $r(A)=n-1$ 时 $|A|=0$ $|A^*|\neq 0$.

$AA^*=|A|E=0$ $r(A)+r(A^*)\leq n$

$r(A^*)\leq n-r(A)=1$

$A^*\neq 0$ ∴ $r(A^*)\geq 1$ ∴ $r(A^*)=1$

5-3 求极大无关组 ∴仅用初等行变换

$A=[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5]=\begin{bmatrix} 1&1&1&0&2 \\ 0&-2&2&1&-4 \\ 0&0&0&1&-2 \\ 0&2&-2&3&-4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&2&0&1 \\ 0&1&-1&0&1 \\ 0&0&0&1&-2 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

∴ $a_3=2a_1-a_2$ $a_5=a_1+a_2-2a_4$

∴ $(a_1,a_2,a_4)$ 为一组极大无关组

①降秩矩阵 $\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow$ 不可逆矩阵A $\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解.

② $r(A)=r(B) \Leftrightarrow$ A与B等价.

③ $r(AB)\le r(A)$或$r(B)$

$r(A+B)\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$

例：设A与B是$m\times k$，$k\times n$阶矩阵，$AB=0$，证$r(A)+r(B)\le k$.

$\because AB=0 \therefore r(A)+r(B)-k\le r(AB)=0$

例：设A是n阶方阵 $A^2+A-6E=0$，证 $r(A+3E)+r(A-2E)=n$.

由上例 $r(A+3E)+r(A-2E)-n\le r(AB)=0$.

$r(A+3E)+r(A-2E)\le n$.

$r(A+3E)+r(A-2E)\ge r(A+3E-A+2E)=r(5E)=n$

$\therefore r(A+3E)+r(A-2E)=n$

等价向量组：向量组Ⅰ：$b_1,b_2,b_3\ldots b_n$中的每个向量可由向量组Ⅱ：$a_1,a_2\ldots a_m$线性表示则称向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示。

定义：若向量组Ⅰ,Ⅱ可互相线性表示，则这两个向量组等价。

PS：向量组与它的极大无关组等价

一个向量组的两个极大无关组等价

若两个向量组等价 则 $r(Ⅰ)=r(Ⅱ)$

# 第六章 线性方程组

## 6-1 线性方程组解的存在性问题

1) 齐次线性方程组（形如 $Ax=0$，一定有解）
- 1) 仅零解（当 $r(A)=n$，线性无关时）
- 2) 含非零解（当 $r(A)<n$，线性相关，$|A|=0$ 时）

2) 非齐次线性方程组（形如 $Ax=b$，未必有解）
- 1) 无解 $r[A,b]\neq r(A)$ 时
- 2) 有唯一解 $r[A,b]=r(A)=n$ 时
- 3) 有无穷多解 $r[A,b]=r(A)<n$ 时.

∴判断方程组有无解的方法 $[A,b]\xrightarrow{\text{行变换}}[B,C]$ 通过判断 $B$ 与 $[B,C]$ 的秩判断 $r(A)$ 与 $r(A,b)$ 关系

由 $B$ 与 $[B,C]$ 的秩代替 $A$ 与 $[A,b]$ 的秩. （$B$ 为行阶梯矩阵）

例：$k$ 取何值时，方程组 $\begin{cases}kx_1+x_2-x_3=k\\x_1+kx_2+x_3=1\\x_1+x_2-kx_3=k\end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷多解？

$$[A,b]=\begin{bmatrix}k&1&-1&k\\1&k&1&1\\1&1&-k&k\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-kr_3]{r_2-r_3}\begin{bmatrix}0&1-k&k^2-1&k-k^2\\0&k-1&1+k&1-k\\1&1&-k&k\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&-k&k\\0&k-1&1+k&1-k\\0&0&k^2+k&1-k^2\end{bmatrix}=[B,C]$$

∴当 $k=-1$ 时 $r(B)=2$ $r[B,C]=2$ $r(A)=r(A,b)<n$ 有无穷多解

当 $k=1$ 时 $r(B)=2$ $r[B,C]=2$ $r(A)=r(A,b)<n$ 有无穷多解

当 $k=0$ 时 $r(B)=2$ $r(B,C)=3$ $r(A)\neq r(A,b)$ 无解.

当 $k\neq\pm1$ 且 $k\neq0$ 时 $r(B)=3$ $r(B,C)=3$ $r(A)=r(A,b)=n$ 唯一解.

几何应用：设有三平面 $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$

则何时三平面交于一点？三平面交于一条直线？三平面重合？

解：令 $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ $x=[x,y,z]^T$ $b=[b_1,b_2,b_3]^T$ ∴$Ax=b$

三平面交于一点 $\Leftrightarrow$ $Ax=b$ 有唯一解 $r[A,b]=r(A)=n=3$

三平面交于一条直线 $\Leftrightarrow$ $Ax=b$ 有无穷多解 $r[A,b]=r(A)=2$

三平面重合 $\Leftrightarrow$ $Ax=b$ 有无穷多解 $r[A,b]=r(A)=1$.

例：(1) 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有无穷多解。 (√) $Ax=b$ 无穷多解 $r(A)=r(A,b)<n$

∴不可逆矩阵 ∴ $Ax=0$ 也无穷多解。

(2) 若 $Ax=0$ 仅零解，则 $Ax=b$ 有唯一解 (×) 可能无解。

6-2 线性方程组解的性质，结构与解法

性质一① 设 $v_1,v_2\dots v_s$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3+\dots k_sv_s$ 也为 $Ax=0$ 的解，$k_1,k_2\dots k_s$ 为任意常数。

(即 $v_1$ 是方程组的解，$v_2$ 也是方程组的解，则 $v_1+v_2$ 也是方程组的解)

性质2 ② 若 $u$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，$v$ 是 $Ax=0$ 的解，则 $u+v$ 是 $Ax=b$ 的解。

性质3 ③ 若 $u_1,u_2\dots u_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，若 $k_1u_1+k_2u_2+\dots+k_su_s$ 是 $Ax=0$ 的解 $\Leftrightarrow k_1+k_2+\dots+k_s=0$

若 $k_1u_1+k_2u_2+\dots+k_su_s$ 是 $Ax=b$ 的解 $\Leftrightarrow k_1+k_2+\dots k_s=1$

性质④：若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解为 $u_1,u_2$，则 $u_1-u_2$ 是 $Ax=0$ 的解。

结构 1)齐次线性方程组

基础解系：齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集S的极大无关组叫做该齐次线性方程组的基础解系。

通解：$Ax=0$ 的基础解系为 $v_1,v_2\dots v_n$，则 $Ax=0$ 的通解 $x=k_1v_1+k_2v_2+\dots k_nv_n$

※齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集S的秩 $r(S)=n-r(A)$，即 $Ax=0$ 的基础解系所含向量个数为 $n-r(A)$，n为未知数个数 (即A的列数)

证：若 $r(A)=n$ 则 $Ax=0$ 仅零解 无解集 $r(S)=0$

若 $r(A)<n$ 则 $Ax=0$ 有非零解 设A最简形 $B=\begin{bmatrix}E_r & B_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 其中 $B_1$ 为 $r\times(n-r)$ 型矩阵

令 $Y=\begin{bmatrix}-B_1\\ E_{n-r}\end{bmatrix}$ 则 $BY=\begin{bmatrix}-E_rB_1+B_1E_{n-r}\\ 0\end{bmatrix}=0$ ∴Y的列向量是 $Bx=0$ 的解 即 $Ax=0$ 的解。

∴Y的列向量是 $Ax=0$ 的 $n-r$ 个线性无关的解 ∴ $r(S)\geq n-r(A)$

∵ $r(A)+r(S)-n\leq r(AS)=0$

∴ $r(A)+r(S)\leq n$

∴ $r(S)=n-r(A)$.

※ 定律 当 $AB=0$

$r(A)+r(B)-n\leq r(AB)$

2) 非齐次线性方程组：设 $u$ 为 $Ax=b$ 的特解 $[v_1,v_2\dots v_s]$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，

则 $Ax=b$ 的通解为 $x=k_1v_1+k_2v_2+\dots+k_sv_s+u$

(非齐次线性方程组的通解=齐次线性方程组的通解+非齐次的一个特解)

解法： 矩阵的初等行变换

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 令 $x_2 = k_1 \quad x_4 = k_2 \quad x_1 = k_1 + k_2 \quad x_3 = 2k_2$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = 2k_2 \\ x_4 = k_2 \end{cases} \quad \therefore x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$\therefore \; x_1 = x_2 + x_4 + 3$ 　令 $x_2 = k_1 \quad x_4 = k_2$

$x_3 = 2x_4 + 1$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 3 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = 2k_2 + 1 \\ x_4 = k_2 \end{cases} \quad x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第七章 向量空间与正交矩阵

7-1 向量空间的概念：设V是n维向量的集合，如果V非空，并对于向量的线性运算封闭，已称为V是一个向量空间。

（线性运算封闭即 任意 $v_1\in V, v_2\in V$，都有 $v_1+v_2\in V$，$kv_1\in V$）

常见的向量空间
1) $V=\{0\}$
2) $V=\{R^n\}$
3) 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的所有解向量构成的集合S

$Av_1=0 \quad Av_2=0 \Rightarrow A(v_1+v_2)=0 \quad A(kv_1)=0$.

向量空间的基与维数：
- 基：向量空间V的一个极大无关组
- 维数：V的秩叫作V的维数，记作 $\dim(V)$ 　若 $\dim(V)=r$ 则r维空间向量

坐标向量：求 $R^3$ 中的向量 $b=[3,0,10]^T$ 在基 $a_1=[1,0,2]^T, a_2=[0,1,-1]^T, a_3=[1,1,3]^T$ 下的坐标向量.

$$\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\2&-1&3&10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\end{bmatrix} \quad \therefore \text{坐标向量 } x=[1,-2,2]^T$$

$$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=b \qquad \begin{cases}k_1+k_3=3\\k_2+k_3=0\\2k_1+3k_3-k_2=10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k_1=1\\k_2=-1\\k_3=2\end{cases} \quad \therefore x=[1,-1,2]^T$$

过渡矩阵：同一向量在不同基下的坐标向量不同，但有内在联系。

旧基 $a_1,a_2\ldots a_n$，新基 $b_1,b_2\ldots b_n$，则新基一定能由旧基线性表示

$$\begin{cases}b_1=p_{11}a_1+p_{21}a_2+p_{31}a_3+\ldots+p_{n1}a_n\\b_2=p_{12}a_1+p_{22}a_2 \ldots\ldots+p_{n2}a_n\\\vdots\\b_n=p_{1n}a_1+p_{2n}a_2+\ldots\ldots+p_{nn}a_n\end{cases}$$

即 $[b_1 b_2 \ldots b_n]=[a_1,a_2\ldots a_n]P$

$$P=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix} \qquad B=AP$$

P为从新基到旧基的过渡矩阵

例) $R^3$ 的两个基 $a_1=[1,0,1]^T \quad a_2=[0,1,-1]^T \quad a_3=[1,1,2]^T$ 和 $b_1=[0,1,1]^T \quad b_2=[1,1,0]^T$

$b_3=[2,-1,3]^T$，则从A到B的过渡矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&-1\\1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}P=AP$$

$$[A,B]=\begin{bmatrix}0&1&2&1&0&1\\1&1&-1&0&1&1\\1&0&3&1&-1&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1&1&2\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$$ 为过渡矩阵.

或
$$\begin{cases}b_1=p_{11}a_1+p_{21}a_2+a_{31}a_3\\b_2=p_{12}a_1+p_{22}a_2+a_{32}a_3\\b_3=p_{13}a_1+p_{23}a_2+p_{33}a_3\end{cases}$$

坐标变换：向量 $v$ 在旧基 $a_1, a_2 \dots a_n$ 中坐标向量为 $x$，在新基 $b_1, b_2 \dots b_n$ 坐标向量为 $y$，从旧基向新基过渡矩阵为 $P$，则 $x=Py$.

$$v = Ax$$
$$v = By = APy$$

$$A(x-Py)=0$$
$$\therefore x = Py$$
$$y = P^{-1}x$$

例：已知 $R^3$ 的两组基 $a_1=[1,0,1]^T$ $a_2=[0,1,-1]^T$ $a_3=[1,1,2]^T$

$b_1=[0,1,1]^T$ $b_2=[1,1,0]^T$ $b_3=(2,-1,3]^T$

则过渡矩阵 $P$？若 $v$ 在 $a_1,a_2,a_3$ 下的坐标向量为 $x=[4,2,1]^T$，则在 $b_1,b_2,b_3$ 下的坐标向量 $y$？

$$B = AP$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} P$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = Py \qquad y = P^{-1}x$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore y = [1,3,1]^T$$

7-2 1) 向量的内积(数量积)：$\vec a\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\langle\vec a,\vec b\rangle$

$$=\vec a_1\vec b_1+\vec a_2\vec b_2$$

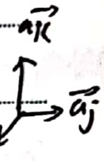
推广：$(\vec a,\vec b)=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$　　$a^Tb$ 是内积运算=数量积$=a_1b_1+a_2b_2+\dots$

$(\vec a,\vec b)=\vec a^Tb$

2) 向量的长度(向量的2范数) $\|\vec a\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots a_n^2}$

当$(\vec a,\vec b)=\|a\|\|b\|\cos\theta$　$\theta=90°$时 $\vec a,\vec b$正交.

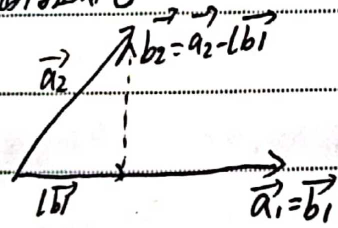
3) 正交向量组：由两两正交的非零向量组成　　$\vec a\vec b=0=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$,




标准正交向量组：单位相量组成的正交向量组　　$a_i^Ta_j=\begin{cases}0 & i\ne j\\ 1 & i=j\end{cases}$　$a_ia_j$正交,相互垂直　$a_i^Ta_i=\|a_i\|^2=1$　$\|a_i\|=1$

4) 一组线性无关的向量组可以通过施密特正交化方法得出等价的正交向量组。

施密特正交化



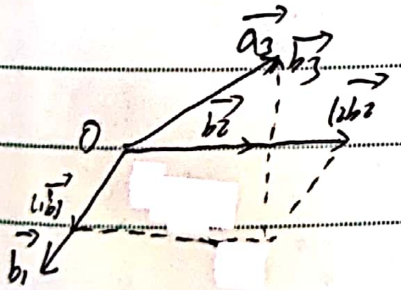

$\vec a_1,\vec a_2$是线性无关向量组,

找到$\vec b_1,\vec b_2$使$\vec b_1\vec b_2$正交且与$\vec a_1,\vec a_2$等价

令$\vec b_1=\vec a_1$

$\vec b_2=\vec a_2-l\vec b_1$　　$l=\frac{b_1^Ta_2}{\|b_1\|^2}$

$$\vec b_2=\vec a_2-\frac{\vec b_1^T\vec a_2}{\|b_1\|^2}\vec b_1$$




令$\vec b_1=\vec a_1$

$l_1=\frac{b_1^Ta_3}{\|b_1\|^2}$　　$l_2=\frac{\vec b_2^T\vec a_3}{\|b_2\|^2}$

$$b_2=\vec a_2-\frac{b_1^Ta_2}{\|\vec b_1\|^2}\vec b_1$$

$$\vec b_3=\vec a_3-\frac{b_1^Ta_3}{\|b_1\|^2}\vec b_1-\frac{b_2^Ta_3}{\|b_2\|^2}b_2$$

∴总结　施密特正交化　　$\vec b_1=\vec a_1$

$$\vec b_j=a_j-\sum_{i=1}^{j-1}\frac{b_i^Ta_j}{\|b_i\|^2}\vec b_i$$

$$\vec b_2=\vec a_2-\frac{b_1^Ta_2}{\|b_1\|^2}\vec b_1$$

$$\vec b_3=\vec a_3-\frac{b_1^Ta_3}{\|b_1\|^2}\vec b_1-\frac{b_2^Ta_3}{\|b_2\|^2}\vec b_2$$

5) 正交矩阵 若方阵A满足 $A^TA=E$，则A为正交矩阵 (行向量与列向量正交)

$(AA^T=E)$

$AA^T=E, AA^{-1}=E \Rightarrow A^{-1}=A^T$ $|A|=\pm1$.

例: 设a为n维单位向量 $A=E-kaa^T$ 是正交矩阵

$$A^TA=(E-kaa^T)(E-kaa^T)$$
$$=E-2kaa^T+k^2aa^Taa^T$$
$$=E-2kaa^T+k^2a\|a\|^2a^T$$

∵a为单位向量 $\|a\|=1$

$$AA^T=E+(k^2-2k)aa^T$$

∴ $k=0$ 或 $2$.

例) 正交矩阵 $A=m\begin{bmatrix}-2 & k & 0\\ 2 & k & 0\\ 0 & 0 & n\end{bmatrix}$ 求k,m,n

∵正交矩阵A ∴A列向量为标准正交向量

∴ $\begin{cases}(-2m)^2+(2m)^2=1\\(km)^2+(km)^2=1\\(mn)^2=1\end{cases}$ ∴ $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$, $k=\pm2$, $n=\pm2\sqrt{2}$.

A为正交矩阵 ⟺ A的列向量为标准正交向量组

$$A^TA=\begin{bmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_n^T\end{bmatrix}[a_1,a_2,\dots,a_n]$$

$\begin{cases}a_i^Ta_i=1\\a_i^Ta_j=0\end{cases}$ ∴列向量互为标准正交向量组 即: $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=1$

例) $A=a\begin{bmatrix}b & 8 & 4\\8 & b & 4\\4 & 4 & c\end{bmatrix}$ 为正交矩阵, 求a,b,c.

$$\begin{cases}8b+8b+16=0\\32+4b+4c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=-1\\c=-7\end{cases}$$

$$\sqrt{(-a)^2+(8a)^2+(4a)^2}=1$$

∴ $a=\pm\frac{1}{9}$

若A为正交矩阵，则A的列向量为标准正交向量组 $A=a\begin{bmatrix}b & 8 & 4\\8 & b & 4\\4 & 4 & c\end{bmatrix}$

则 $\begin{cases}8b+8b+16=0\\32+4b+4c=0\end{cases}$ ∴ $b=-1$ $c=-7$.

∵标准正交向量组 ∴ $\sqrt{(-a)^2+(8a)^2+(4a)^2}=1$

∴ $a=\pm\frac{1}{9}$

(若A为正交矩阵, $|A|=\pm1$
$A^T$与$A^{-1}$也为正交矩阵)

# 第八章 方阵的特征值与特征向量

1) 特征值：A为n阶方阵，λ为变量，$|\lambda E-A|=0$的根为A的特征值

例 求$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$的特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$ ∴A的特征值 $\lambda_1=i$ $\lambda_2=-i$

例：求$B=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\2&-3&-2\\-2&2&1\end{bmatrix}$的特征值

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\-2&\lambda+3&2\\2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3+r_1}\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\-1-\lambda&\lambda+1&0\\\lambda+1&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

（又 行列式的初等变换 {倍加不变 / 倍乘：提系数 / 对调：添负号} $\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}\xrightarrow{2r_2}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&3\\2&4\end{vmatrix}$ ）

∴B的特征值 $\lambda_1=-1$（二重） $\lambda_2=1$（单）

2) 特征向量：$(\lambda_iE-A)x=0$的非零解向量称为A的对应于$\lambda_i$的特征向量

例：上例中B的特征向量 $\lambda_1E-B=\begin{bmatrix}-2&2&2\\-2&2&2\\2&-2&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴基础解系：$P_1=[1,1,0]^T$ $P_2=[1,0,1]^T$

∴$\lambda_1=-1$ 对应的全部特征向量 $k_1P_1+k_2P_2$（$k_1,k_2$不全为0）

$\lambda_2E-B=\begin{bmatrix}0&2&2\\-2&4&2\\2&-2&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴基础解系：$P_3=[1,1,-1]^T$

∴$\lambda_2=1$ 对应的全部特征向量 $k_3P_3$

例：$C=\begin{bmatrix}3&3&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}$的特征值及对应的特征向量

$$|\lambda E-C|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-3&-1\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)\lambda^2-(-3\lambda+1)=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3$$

C特征值 $\lambda_1=1$（三重）

$(\lambda_1E-C)=\begin{bmatrix}-2&-3&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ ∴基础解系 $P=(1,-1,1)^T$

∴$\lambda_1=1$ 对应的全部特征向量 $kP$

3) 特征值与特征向量的性质

性质1：n阶矩阵A有且只有n个特征值（K重特征值算作K个）

$|\lambda E-A|$ 称为A的特征多项式

$|\lambda E-A|=0$ 称为A的特征方程

$(\lambda_i E-A)x=0$ 的解为特征向量(非零解).

性质2：定义 $tr(A)$ 为方阵A的迹，是A的n个对角元之和

$(tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{nn})$

性质3：特征值的和 $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=tr(A)$ 等于方阵A的迹，即对角线元素之和。

性质4：$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=|A|$

性质5：方阵A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow$ A的所有特征值不为0

性质6：若A是n阶方阵，λ是A的特征值，p是λ对应的特征向量，

则 $Ap=\lambda p$ （描述了矩阵及其特征值与特征向量的关系）

（证 $(\lambda E-A)p=0$ ∴ $Ap=\lambda p$）

性质7：若λ是方阵A的特征值，p是λ对应的特征向量，则 $\lambda^k$ 是 $A^k$ 的特征值，p仍是$A^k$的特征向量

例 设方阵A满足 $A^2+A-2E=0$，则A的特征值？

令 $f(A)=A^2+A-2E$ 则 $f(A)=0$　$f(A)$只有零特征值

设λ是 $f(A)$ 的特征值　则 $f(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2=0$

∴ $(\lambda+2)(\lambda-1)=0$ ∴ $\lambda_1=1$　$\lambda_2=-2$.

性质8：若λ是可逆矩阵A的特征值，p是对应的特征向量，则 $A^{-1}$ 的特征值为 $\lambda^{-1}$，

$A^*$ 的特征值为 $|A|\lambda^{-1}$

p仍是 $A^{-1}$, $A^*$ 的特征向量.

$$\begin{cases} |A||A^{-1}|=1 \\ |A|A^{-1}=A^*. \\ AA^{-1}=E. \\ AA^*=|A|E \end{cases}$$

性质9：A与 $A^T$ 的特征值相同

性质10：若 $\lambda_1,\lambda_2\dots\lambda_n$ 是方阵A的互异特征值，则他们对应的特征向量一定线性无关

8-2 相似矩阵.

可逆矩阵P, $PAQ=B$，则 A, B 等价。

补充：正交矩阵 $A^TA=E$.

列向量互为标准正交向量组 $a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1$

$\begin{cases} a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0 \\ a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0 \end{cases}$

可逆矩阵P, $PAP^{-1}=B$，则 A, B 相似。

则P为相似变换矩阵, $PAP^{-1}$ 为相似变换，若P作为正交矩阵，则 $P^{-1}AP=B$ 为正交相似变换。

1) 性质1：若 A与B相似，则 $A^k$ 与 $B^k$ 相似.

性质2：若 A与B相似，则 A与B的特征多项式相同，A与B的特征值，行列式，迹 均相同.

证1: $B=P^{-1}AP$
$B^k=P^{-1}A^kP$

证2: $|\lambda E-B|=|\lambda EP^{-1}P-P^{-1}AP|$
$=|P^{-1}(\lambda E-A)P|$
$=|\lambda E-A|$

若矩阵A能与对角矩阵相似，则称A可相似对角化，当A可相似对角化时，与A相似的对角矩阵叫作A的相似标准形。

如果A相似于对角矩阵，则该对角矩阵的对角元为A的全部特征值。

1) 不是所有矩阵可以相似对角化.

2) n阶方阵A可相似对角化的充要条件A有n个线性无关的特征向量。

A的可相似对角化的相似变换矩阵P 就是由 A的n个线性无关的特征向量 为列构成的矩阵。

对角矩阵的n个对角元恰为A的n个特征值。

∴ 判断是否可以相似对角化
(实对称矩阵都可以相似对角化)
1) 求出A的每个特征值对应的特征向量，看是否n个特征向量线性无关。
2) 若A的n个特征值均为单特征值，则可以相似对角化。
(∴ 讨论方阵A是否可以相似对角化时，单特征值不必讨论)
3) 方阵A可相似对角化 $\Longleftrightarrow$ A的每个特征值对应的线性无关特征向量个数恰等于重数

例: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 1) 求一个可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出该对角矩阵
2) 求 $A^k$，其中k为正整数。

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

∴ A的特征值 $\lambda_1=1$ (二重), $\lambda_2=2$.

对于 $\lambda_1=1$. $\lambda_1E-A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 基础解系: $P_1=(1,-1,0)^T$ $P_2=(1,0,1)^T$

对于 $\lambda_2=2$ $\lambda_2E-A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 基础解系 $P_3=(1,1,1)^T$

∴ $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

∴ $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

② $A^k=PA^kP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 2^k & 2^k-1 & 1-2^k \\ 2^k-1 & 2^k & 1-2^k \\ 2^k-1 & 2^k-1 & 2-2^k \end{bmatrix}$

⑤ 对称矩阵一定可以相似对角化。 (∴ 出题一般均是对称矩阵)
(把求出的特征向量单位化，则可得到正交相似对角矩阵)

单特征值根 → 1个基础解系
n重特征值根 → n个基础解系

例: $A=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 求一个正交矩阵 $Q$，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵

$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-2&\lambda&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1)$

※ 若n重特征值根 对应的n个基础解系，但须施密特正交化。

∴ $A$ 的特征值 $\lambda_1=2$ $\lambda_2=4$ $\lambda_3=-1$

对于 $\lambda_1=2$ $[\lambda_1E-A] \Rightarrow \begin{bmatrix}-1&-2&0\\-2&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&-2&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴ 基础解系 $p_1=[0,0,1]^T$

对于 $\lambda_2=4$ $[\lambda_2E-A] \Rightarrow \begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

∴ 基础解系 $p_2=(2,1,0)^T$

对于 $\lambda_3=-1$ $[\lambda_3E-A] \Rightarrow \begin{bmatrix}-4&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$

基础解系 $p_3=[1,-2,0]^T$

∴ 把 $p_1,p_2,p_3$ 单位化 $q_1=[0,0,1]^T$

$q_2=[\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0]^T$

$q_3=[\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5},0]^T$

∴ $Q=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\0&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\1&0&0\end{bmatrix}$ ∴ $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}2&&\\&4&\\&&-1\end{bmatrix}$

例: $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$ 求一个正交矩阵 $Q$，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵

$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$ ∴ 特征值 $\lambda_1=1$(二重), $\lambda_2=-2$

对于 $\lambda_1=1$ $[\lambda_1E-A]=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $p_1=[1,1,0]^T$ $p_2=[1,0,1]^T$

对于 $\lambda_2=-2$ $[\lambda_2E-A]=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-2&1\\0&3&-3\end{bmatrix}$ $p_3=[-1,1,1]^T$

正交化 令 $u_1=p_1$,

$u_2=p_2-\frac{u_1^Tp_2}{\|u_1\|^2}u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

再单位化 $q_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $q_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ $q_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

∴ $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$ ∴ $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$

# 第九章 二次型与二次曲面

(二次型是线性代数中用于研究二次曲面的工具)

## 9-1 二次型的概念

① 形如 $f(x_1,x_2\ldots x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$ 的二次齐次函数为n元二次型。

② 只含平方项的二次型 $g(y_1,y_2\ldots y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\ldots+d_ny_n^2$ 为标准二次型

③ 二次型矩阵的形式 $f(x)=x^TAx$ (定义:A一定为对称矩阵,即 $a_{12}=a_{21}$, $a_{13}=a_{31}\ldots$)

$$=[x_1,x_2\ldots x_n]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

∴ A的对角元 $a_{ii}$ 为 $x_i^2$ 的系数

A的非对角元 $a_{ij}$ 为 $x_ix_j$ 的系数的 $\frac{1}{2}$

A的秩为二次型 $f(x)=x^TAx$ 的秩。

例:二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_2-4x_2x_3$ 的矩阵形式为 $f(x)=x^TAx$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

∴ $r(A)$ 的秩为2. $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩也为2

## 9-2 线性变换与合同变换

线性变换: $y=Ax$ A为 $m\times n$ 型矩阵,x为n元列向量,$y=Ax$ 叫做从n元列向量到m元向量y的线性变换

当A为可逆矩阵,叫做可逆变换 $|A|\neq 0$

当A为正交矩阵,叫做正交变换 $AA^T=E$

合同变换:对于n阶方阵A,B,若存在可逆矩阵P,使 $P^TAP=B$,则称A与B相合,$P^TAP$ 叫做对A的合同变换。

(∴对二次型的可逆变换实际对其矩阵进行合同变换 $B^T=(P^TAP)^T=P^TA^TP=P^TAP=B$)

9.3 化二次型为标准型

1) 用正交变换方法

定理：对任何实对称矩阵A，总存在正交矩阵Q，使$Q^TAQ$为对角矩阵(即$Q^{-1}AQ$)，再通过$x=Qy$，即可将二次型$f(x)=x^TAx$化为标准型。

例：将 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ (由V8)

(1) 化为二次型矩阵 $f(x)=x^TAx$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

(2) 求得特征矩阵

$$由\ |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$$

求得λ的特征值 $\lambda_1=1$(二重) $\lambda_2=-2$. 将$p_1,p_2$正交化.

当$\lambda_1=1$时 $[\lambda_1E-A]=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

令$\eta_1=p_1$, $\eta_2=p_2-\frac{\eta_1^Tp_2}{\|\eta_1\|^2}\eta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

∴基础解系 $p_1=[1,1,0]^T$ $p_2=[1,0,1]^T$

将其单位化 $q_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $q_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

当$\lambda_2=-2$时 $[\lambda_2E-A]=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-2&1\\0&3&-3\end{bmatrix}$

基础解系 $p_3=[-1,1,1]^T$ 单位化 $q_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$\therefore Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}\qquad\therefore Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}[1,1,-2]$$

(3) ∴$f(x)=f(x_1,x_2,x_3)$的标准型 $g(y)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$

9.2 正定二次型与正定矩阵

①：对于n元二次型 $f(x)=x^TAx$，若对任意n元非零实向量x都有 $f(x)>0$，则称该二次型为正定二次型，并称A为正定矩阵。若对于任意n元非零向量x，都有 $f(x)<0$，则称该二次型为负定二次型，A为负定矩阵。

$$[x_1,x_2,x_3\ldots x_n]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\ldots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}\ldots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{21}x_2x_1+a_{31}x_3x_1+\ldots a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_1^2$$

$$[x_1,x_2]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=(a_{11}x_1+a_{21}x_2,\ a_{12}x_1+a_{22}x_2)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=a_{11}x_1^2+a_{11}x_1x_2+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{12}x_1x_2.$$

$$[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3,\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3,\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{21}x_1x_2+a_{31}x_1x_3+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+a_{32}x_3x_2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$$

∴ 当A的特征值都为正数 ⟺ $f(x)$是正定二次型，A为正定矩阵 ⟺ 存在n阶可逆矩阵B使 $A=B^TB$
⟹ A的对角元 $a_{ii}>0$ ⟺ $|A|>0$. ⟺ A的各阶顺序主子式 $|A|>0$.

例：证 $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&4&1\\2&1&9\end{bmatrix}$ 为正定矩阵

$|A_1|=|1|>0$

$|A_2|=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&4\end{vmatrix}=3>0$

$|A_3|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&4&1\\2&1&9\end{vmatrix}=6>0$

∴ A为正定矩阵。

判断正定矩阵的方法

$|A_1|>0\ \ |A_2|>0\ldots|A|>0.$

判定负定矩阵

$|A_1|<0\ \ |A_2|<0\ldots|A|<0.$

例：$A=\begin{bmatrix}1&k&1\\k&4&2\\1&2&2\end{bmatrix}$ 为正定矩阵的k取值范围

$|A_1|=1>0$

$|A_2|=\begin{vmatrix}1&k\\k&4\end{vmatrix}=4-k^2>0$

$|A_3|=\begin{vmatrix}1&k&1\\k&4&2\\1&2&2\end{vmatrix}=4k-2k^2>0$

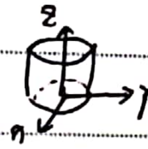
∴ $0<k<2$ 时为正定矩阵。

9-3 曲面及其方程.

一：球面方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

柱面方程：动直线l沿准线C移动形成的曲面为柱面。

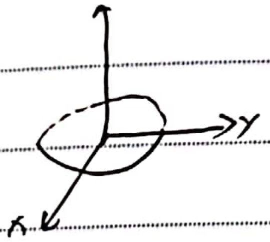
$x^2+y^2=r^2$ 在xOy平面表示一个圆

在空间直角坐标系中  表示一个圆柱面



若仅含两个变量 为柱面（在平面表曲线，沿无变量方向延伸）.

若不平行于坐标轴：准线C：$x^2+y^2=1$，母线平行于向量$\vec{s}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$的柱面的方程





设P为柱面上一点，过P的母线与准线交于$P_0(x_0,y_0,0)$ 则 $\overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{s}$.

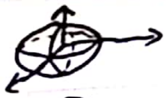
$$\frac{x-x_0}{-1}=\frac{y-y_0}{3}=\frac{z}{1}$$

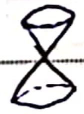
∴ $x_0=x+z$

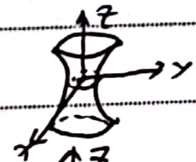
$y_0=y-3z$

∴ $x_0^2+y_0^2=1$

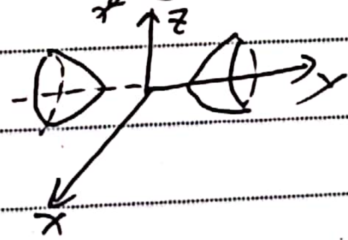
∴ $(x+z)^2+(y-3z)^2=1$

二次曲面：椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 

二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 

单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 



双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 



例) $2xy+2xz-2yz+\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+1=0$

当存在单项x,y,z时.

$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$ $b=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$

∴ $u^TAu+b^Tu+1=0$.

∴ $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$ ∴ $Q^TAQ=diag[1,1,-2]$

$b^TQ=[2,0,0]$

∴ $x^2+y^2-2z^2+2x_1+1=0$.

$(x_1+1)^2+y^2-2z^2=0$

∴ 标准方程 $x^2+y^2-2z^2=0$ ∴ 圆锥面

化简二次方程为标准方程，判断其代表曲面种类.

例1) $3x^2+4xy+2z^2=1$ 1)代表的曲面种类

$A=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-2&\lambda&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)[\lambda(\lambda-2)+2[-2(\lambda-2)]]$

$=(\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-2)$

∴ 特征值 $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=2$ $\lambda_3=4$

∴ $(-E-A)=[-4\ -2\ 0\ \ldots]$ ∴ $P_1=[1,-2,0]^T$

$P_2=[0,0,1]^T$

$P_3=[2,1,0]^T$

∴ 单位化，$Q=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\1&0&0\end{bmatrix}$

∴ $Q^{-1}AQ=diag[4,2,-1]$

∴ $4x^2+2y^2-z^2=1$

∴ $\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}-z^2=1$

∴ 单叶双曲面.