第十一章 线性电路暂态响应的复频域分析

（高阶微分方程要确定以后确定初始值与积分常数 用拉氏变换 简便求解 分析，二阶及二阶以上）

一、拉普拉斯变换

① 拉普拉斯变换

$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\mathcal{L}[f(t)]$

周期性拉普拉斯变换

$f(t+T)=f(t)$ 则 $\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$

$\mathcal{L}[H(t)]=\mathcal{L}[1]=\int_0^{\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}$

$\mathcal{L}(t^m)=\frac{m!}{s^{m+1}}$ $\begin{cases}\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}\\ \mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2}\\ \mathcal{L}(t^2)=\frac{2}{s^3}\end{cases}$

$\mathcal{L}[e^{kt}]=\int_0^{\infty}e^{kt}e^{-st}dt=\frac{1}{s-k}$

$\mathcal{L}(e^{-kt})=\frac{1}{s+k}$

$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$

$\mathcal{L}(\sin kt)=\frac{k}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}(\cos kt)=\frac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}(\sinh kt)=\frac{k}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}(\cosh kt)=\frac{s}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}(A)=\frac{A}{s}$

$\mathcal{L}[A(1-e^{-kt})]=\frac{A}{s}-\frac{A}{s+k}$

$\mathcal{L}(t)=\int_0^{\infty}te^{-st}dt=-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s^2}$

例：求下列函数的拉普拉斯变换

(1) $\sin^2 t$ $\quad \mathcal{L}(\sin^2 t)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(1-\cos 2t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)=\frac{2}{s(s^2+4)}$

(2) $2t+a\sin at$ $\quad \mathcal{L}(2t+a\sin at)=\frac{2}{s^2}+\frac{a^2}{s^2+a^2}$

含初始的 $\begin{cases}\text{微分性质} & \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots f^{(n-1)}(0)\\ & \mathcal{L}[f'''(t)]=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)\\ \text{积分性质} & \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dx\right]=\frac{F(s)}{s}\end{cases}$

$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ $\quad \mathcal{L}[e^{-at}]=\frac{1}{s+a}$ $\quad \mathcal{L}(\sin \omega t)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\quad F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$

$\mathcal{L}[H(t)]=\frac{1}{s}$ $\quad \mathcal{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a}$ $\quad \mathcal{L}(\cos\omega t)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$ $\quad f(t+T)=f(t)$

$\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2}$ $\quad \mathcal{L}[te^{-at}]=\frac{1}{(s+a)^2}$ $\quad \mathcal{L}(\sinh\omega t)=\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$ $\quad \mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$

$\mathcal{L}(t^2)=\frac{2}{s^3}$ $\quad \mathcal{L}[t^2e^{-at}]=\frac{2}{(s+a)^3}$ $\quad \mathcal{L}(\cosh\omega t)=\frac{s}{s^2-\omega^2}$

$\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad$ 性质：位移性质 $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$ $\quad \mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}(A)=\frac{A}{s}$ $\quad$ 零初始：$\begin{cases}\text{微分性质} & \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)\\ \text{积分性质} & \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s^n}\end{cases}$

初值定理 $\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$

终值定理 $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

② 拉普拉斯变换性质

1) 线性性质　$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$　　$L^{-1}[\alpha F(s)+\beta G(s)]=\alpha L^{-1}[F(s)]+\beta L^{-1}[G(s)]$

2) 位移性质　$L[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}L[f(t)]=e^{-s\tau}F(s)$　　$L^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)$

$L[e^{at}f(t)]=F(s-a)$　　$L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}f(t)$

3) 相似性质　$L[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

$L[f(at-b)]=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}F(\frac{s}{a})$

例: 已知 $L(e^{t})=\frac{1}{s-1}$　求 $L(e^{kt})=\frac{1}{k}\frac{1}{\frac{s}{k}-1}=\frac{1}{s-k}$

4) 微分性质　$F(s)=L[f(t)]$

(原函数)　则 $L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$L[f^{(n)}(t)]=s^{n}F(s)-s^{n-1}f(0)-\dots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$

即 $L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$L[f''(t)]=s^{2}F(s)-sf(0)-f'(0)$

$L[f'''(t)]=s^{3}F(s)-s^{2}f(0)-sf'(0)-f''(0)$

5) 微分性质　$F(s)=L[f(t)]$

(象函数)　$F'(s)=-L[tf(t)]$　　$L[tf(t)]=-F'(s)=-(L[f(t)])'$

$F^{(n)}(s)=(-1)^{n}L[t^{n}f(t)]$

6) 积分性质　$h(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$　　即 $h'(t)=f(t)$

则 $L[f(t)]=L[h'(t)]=sL[h(t)]$　　$L[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty}F(s)ds$

$L(\int_0^t f(\tau)d\tau)=\frac{1}{s}L[f(t)]$

$L(\int_0^t\int_0^t\dots\int_0^t f(t)(dt)^{n})=\frac{1}{s^{n}}L[f(t)]$

7) 象函数积分性质　$\int_s^{\infty}F(s)ds=L[\frac{f(t)}{t}]$

$\int_s^{\infty}\int_s^{\infty}\dots\int_s^{\infty}F(s)(ds)^{n}=L[\frac{f(t)}{t^{n}}]$

③ 初值定理:　$f(0)=\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{s\to\infty}[sF(s)]$　　$L[f(t)]=F(s)$

$f'(0)=\lim_{t\to0}f'(t)=\lim_{s\to\infty}[s^{2}F(s)-sf(0)]$　　$L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$L[f''(t)]=s^{2}F(s)-sf(0)-f'(0)$

$f''(0)=\lim_{t\to0}f''(t)=\lim_{s\to\infty}[s^{3}F(s)-s^{2}f(0)-sf'(0)-f'(0)]$

例: 求 $F(s)=\frac{1}{s(s^{2}+a^{2})}$ 的 $f(0)$ 与 $f'(0)$

$f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{2}+a^{2}}=0$

$f'(0)=\lim_{s\to\infty}[s^{2}F(s)-sf(0)]=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s^{2}+a^{2}}=0$

④ 终值定理 $f(\infty)=\lim_{s\to 0}[sF(s)]$

⑤ 拉普拉斯逆变换

1) 反演积分公式与留数

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{n}Res[F(s)e^{st},s_k],\ t>0$$

令 $F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$ $A(s),B(s)$ 无公共零点 且 $A(s)$ 次数小于 $B(s)$

则 $Res[F(s)e^{st},s_k]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}[(s-s_k)^m F(s)e^{st}]$ s_k 为 $B(s)=0$ 的m重根.

当 $m=1$ 时 $Res[F(s)e^{st},s_k]=\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t}$ m为 $B(s)=0$ 的重复根的个数

当 $m=2$ 时 $Res[F(s)e^{st},s_k]=$ s_k 为 s_1,s_2,s_3 即 $B(s)=0$ 的重复根

例: $F(s)=\frac{s}{s^2+1}$ 令 $F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$ $A(s)=s$ $B(s)=s^2+1$ $B'(s)=2s$

令 $B(s)=0$ $s_1=j$ $s_2=-j$ 均为单级极点

$$f(t)=\frac{A(s_1)}{B'(s_1)}e^{s_1 t}+\frac{A(s_2)}{B'(s_2)}e^{s_2 t}$$

$$=\frac{1}{2}e^{jt}+\frac{1}{2}e^{-jt}=\cos t$$

例: $F(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}$ 令 $F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$ $A(s)=1$ $B(s)=s(s-1)^2$ $B'(s)=3s^2-4s+1.$

令 $B(s)=0$ $s_1=0$ 为1级极点. $s_2=1$ 为二级极点

$$f(t)=\frac{A(s_1)}{B'(s_1)}e^{s_1 t}+\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}e^{st}\right]$$

$$=1+\lim_{s\to 1}\frac{ste^{st}-e^{st}}{s^2}=1+te^{t}-e^{t}$$

No: Date :

2) 由常和函数正反变换

$\delta(t) \sim 1 \qquad t^m \sim \frac{m!}{s^{m+1}} \qquad 1 \sim \frac{1}{s}$

$e^{kt} \sim \frac{1}{s-k} \qquad \cos kt \sim \frac{s}{s^2+k^2} \qquad \sin kt = \frac{k}{s^2+k^2}$

3) 部分分式法.

1) $F(s) = \frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s-1)^2} + \frac{A_3}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1}$

$\cancel{\lim_{s\to 0} \frac{1}{(s-1)^2} = 1 \quad (s-1)^2 A_1 + A_2 s(s-1)} = 1$

$\cancel{\lim_{s\to 1} \quad (A_1+A_3)s^2 - 2sA_1 - A_3 s + A_1} = 1.$

$A_1(s-1)^2 + A_2 s + A_3(s(s-1)) = 1.$

$A_1 s^2 + A_3 s^2 - 2A_1 s + A_1 + A_2 s - A_3 s = 1.$

$A_1 + A_3 = 0 \quad A_2 - A_3 - 2A_1 = 0 \quad A_1 = 1$

$\therefore A_3 = -1 \quad A_2 = 1$

2) $F(s) = \frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s} \qquad s^3+7s^2+10s = s(s+2)(s+5) \qquad F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+5}$

$A_1 = \lim_{s\to 0} \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)} \cdot s = \frac{1}{10}$

$A_2 = \lim_{s\to -2} \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}(s+2) = \frac{1}{2}$

$A_3 = \lim_{s\to -5} \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}(s+5) = -0.6$

$\therefore F(s) = \frac{0.1}{s} + \frac{0.5}{s+2} - \frac{0.6}{s+5}$

$f(t) = L^{-1}(F(s)) = 0.1 + 0.5e^{-2t} - 0.6e^{-5t}.$

4) 性质 $L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$

$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$

$L[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$

$L^{-1}(e^{-s\tau}F(s)) = f(t-\tau)$

(6) 卷积

二、复频域分析

① 当储能元件较多时，需要列写较多的高阶微分方程，并确定导数初始值，但很多时候高阶导数常常没有明确的物理意义，所以用拉普拉斯变换，在复频域上分析。

② 两种思路
1) 在时域列出电路方程，对方程拉氏变换 得代数方程，求解再反变换
2) 对电路定律元件做拉氏变换，建立复频域电路模型（更实用）

1) 复频域下电路定律　　KCL　　$\sum \pm I_k(s)=0$

KVL　　$\sum \pm U_k(s)=0$

2) 复频域下电路元件

电阻　　$u=iR$　　$U_R(s)=RI_R(s)$

电容　　$i=C\frac{du}{dt}$　　$I_c(s)=s(U_c(s)-Cu_c(0_-)$

$U_c(s)=\frac{1}{sC}I_c(s)+\frac{u_c(0_-)}{s}$

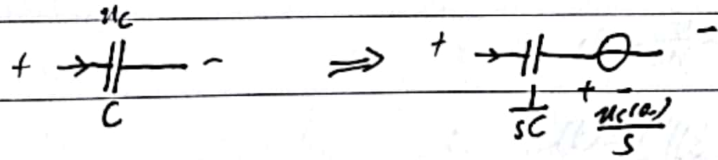
电感　　$u=L\frac{di}{dt}$　　$U_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0_-)$

$I_L(s)=\frac{U_L(s)}{sL}+\frac{i_L(0_-)}{s}$

$\frac{1}{sC}$ 为运算容抗　　sL为运算感抗

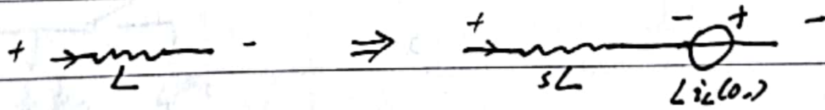
电路模型

电容：



$U_c(s)=\frac{1}{sC}I_c(s)+\frac{u_c(0_-)}{s}$

电感：

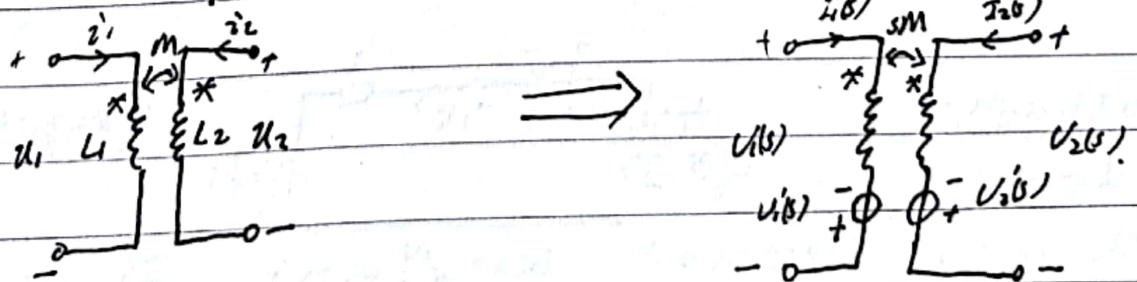


$-\ U_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0_-)$

3) 复频域下的互感元件　　时域形式　　复频域形式

$$\begin{cases} u_1=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt} \\ u_2=M\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1(s)=SL_1I_1(s)-L_1I_1(0_-)+sMI_2(s)-MI_2(0_-) \\ U_2(s)=sL_2I_2(s)-L_2I_2(0_-)+sMI_1(s)-MI_1(0_-) \end{cases}$$

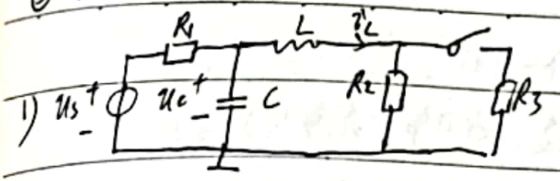


$$\begin{cases} U_1'(s)=L_1i_1(0_-)+Mi_2(0_-) \\ U_2'(s)=Mi_1(0_-)+L_2i_2(0_-) \end{cases}$$

$U_1(s)+U_1'(s)=sL_1I_1(s)+sMI_2(s)$

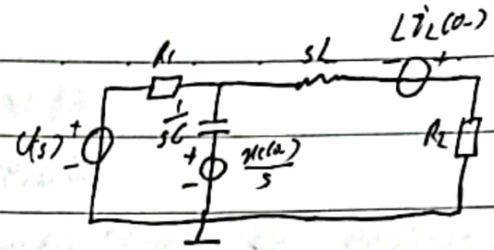
$U_2(s)+U_2'(s)=sL_2I_2(s)+sMI_2(s)$

③ 例题.

1) 

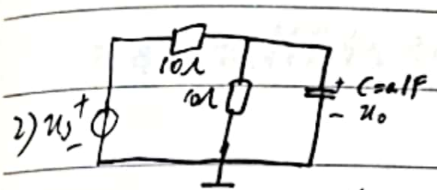
$t=0$ 时开关断开

等效电路 $\Longrightarrow$

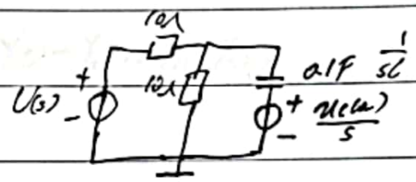


$i_L(0_-)=\frac{U_s}{R_1+R_2\parallel R_3}$

$u_C(0_-)=\frac{R_2\parallel R_3}{R_1+R_2\parallel R_3}u_s$

2) 

复频域式 $\Longrightarrow$



~~$U(s)=$~~ $u_s=20e^{-t}\varepsilon(t)$. 求 u_0

$U(s)=\mathcal{L}[20e^{-t}\varepsilon(t)]$

$=\frac{20}{s+1}$

$u_C(0_-)=0$ （图中所示状态）

$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+sC\right)U_{n1}=\frac{U_s}{10}+\frac{u_C(0_-)}{s}\cdot sC$

$\left[\frac{1}{5}+0.1s\right]U_{n1}=\frac{2}{s+1}$

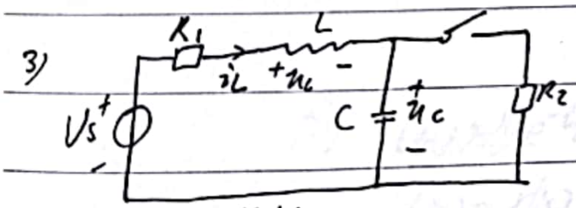
$U_{n1}=\frac{20}{(s+1)(s+2)}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s+2}$

$A_1=\lim_{s\to-1}\frac{20}{(s+1)(s+2)}(s+1)=20$

$A_2=\lim_{s\to-2}\frac{20}{(s+1)(s+2)}(s+2)=-20.$

$\therefore U_{n1}=\frac{20}{s+1}-\frac{20}{s+2}$

$\therefore u_0(t)=\mathcal{L}^{-1}(U_{n1})=20e^{-t}-20e^{-2t}.$

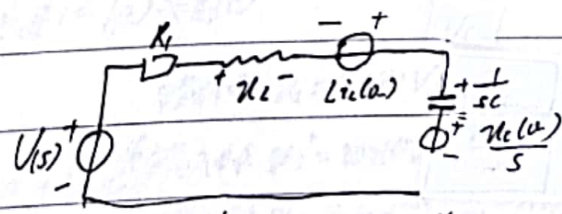
3) 

$t=0$ 时开关断开

$U_s=30V$ $R_1=25\Omega$ $R_2=75\Omega$

$L=0.5H$ $C=5\times10^{-3}F$ 求 $t>0$ 时电感电压 u_L 与 u_C

转化为复频域模型



$\therefore U_L(s)=sL\,I_L(s)-Li_L(0_-)$

$U_C(s)=\frac{1}{sC}I_L(s)+\frac{u_C(0_-)}{s}$

$U(s)=\mathcal{L}(30)=\frac{30}{s}$ $i_L(0_-)=\frac{U_s}{R_1+R_2}=0.3A$ $u_C(0_-)=22.5V$

$U_s+Li_L(0_-)-\frac{u_C(0_-)}{s}=I_L(s)R_1+sL\,I_L(s)+\frac{1}{sC}I_L(s).$

$\frac{30}{s}+0.15-\frac{22.5}{s}=I_L(s)\left[25+0.5s+\frac{200}{s}\right)$

$I_L(s)=\frac{0.3s+15}{s^2+50s+400}$

$\therefore U_L(s)=\frac{-60}{s^2+50s+400}$

$=\frac{A_1}{s+10}+\frac{A_2}{s+40}=\frac{-2}{s+10}+\frac{2}{s+40}$

$U_C(s)=\frac{22.5s^2+1155s+12000}{s(s^2+50s+400)}$

$=\frac{3}{s}+\frac{-8}{s+10}+\frac{0.5}{s+40}$

$u_L=\mathcal{L}^{-1}[U_L(s)]=-2e^{-10t}+2e^{-40t}.$

$\therefore u_C=\mathcal{L}^{-1}[U_C(s)]=3-8e^{-10t}+0.5e^{-40t}$

④ 复频域网络函数及其性质

1) 网络为线性零状态，有且只有一个独立电压源，用 $x(t)$ 表示

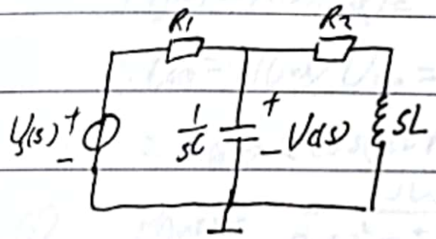
以某一支路电流 求电压为响应　　用 $y(t)$ 表示

则响应象函数与激励象函数必然成正比，这个比值为网络函数，即 $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

令 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ 表示网络函数的单位冲激特性。

2) 当网络函数是全响应时，即电路有初始值时　　$Y(s)-Y_0(s)=H(s)X(s)$

例:



$R_1=10\Omega$　$R_2=20\Omega$　$L=0.2H$　$C=0.01F$

1) 定义网络函数 $H(s)=\frac{U_c(s)}{U_s(s)}$　求 $H(s)$ 及其单位冲激特性 $h(t)$.

2) 求当 $u_s(t)=3e^{-t}\varepsilon(t)$ V 时的零状态响应 $u_c(t)$.

① 节点电压方程　$\left[\frac{1}{R_1}+sC+\frac{1}{R_2+sL}\right]U_c(s)=\frac{U_s(s)}{R_1}$

$$H(s)=\frac{V_c(s)}{U_s(s)}=\frac{10s+1000}{s^2+110s+1500}\approx\frac{10(s+100)}{(s+15.949)(s+94.051)}$$

$$=\frac{10.762}{s+15.949}+\frac{-0.762}{s+94.051}$$

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=10.762e^{-15.949t}-0.762e^{-94.051t}$$

② $U_s(s)=\mathcal{L}[3e^{-t}\varepsilon(t)]=\frac{3}{s+1}$

$$U_c(s)=H(s)U_s(s)=\frac{3}{s+1}\cdot\frac{10(s+100)}{(s+15.949)(s+94.051)}=\frac{2.135}{s+1}+\frac{-2.160}{s+15.949}+\frac{0.025}{s+94.051}$$

$$\therefore u_c(t)=\mathcal{L}^{-1}[U_c(s)]=2.135e^{-t}-2.160e^{-15.949}+0.025e^{-94.051}$$

$\Updownarrow$

$u_c(t)=h(t)*u_s(t)$

例：全响应时：

输入电压 $u_s=10\varepsilon(t)$ V时，网络全响应 $u=(10-3.2e^{-5t})$ V

初始值保持不变 输入电压 $u_s'=20\varepsilon(t)$ V时，网络全响应 $u'=(20-7.2e^{-5t})$ V

输入电压 $u_s''=12e^{-10t}$ V时，网络全响应 $u=?$

$$\begin{cases}U(s)=U_0(s)+U_s(s)H(s)\\V(s)=V_0(s)+V_s(s)H(s)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{10}{s}-\frac{3.2}{s+5}=U_0(s)+\frac{10}{s}H(s)\\\frac{20}{s}-\frac{7.2}{s+5}=U_0(s)+\frac{20}{s}H(s)\end{cases}$$

$\therefore H(s)=\frac{0.6s+5}{s+5}$　　$U_0(s)=\frac{0.8}{s+5}$

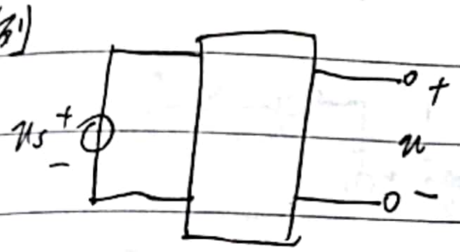
$\therefore U_s=\frac{0.8}{s+5}+\frac{0.6s+5}{s+5}\cdot\frac{12}{s+10}=\frac{5.6}{s+5}+\frac{2.4}{s+10}$　$\therefore u(t)=5.6e^{-5t}+$

⑤ 复频域函数与复数网络函数的转换

$H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$

$H(s)=H(j\omega)|_{j\omega=s}.$

例



线性无源网络

① $u_s=\varepsilon(t)$ V 时，零状态响应 $u=(-e^{-t}+2e^{-2t})\varepsilon(t)$ V

求当 $u_s=3\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)$ V 时正弦稳态电压 u，

② 若已知 $H(j\omega)=\dfrac{\dot U}{\dot U_s}=\dfrac{j\omega}{-\omega^2+5j\omega+6}$ 求单位冲激特性 $h(t)$.

① $H(s)=\dfrac{\mathcal{L}(u)}{\mathcal{L}(u_s)}=\dfrac{-\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}}{\frac{1}{s}}=\dfrac{s^2}{s^2+3s+2}$

$H(j\omega)=H(s)|_{(j\omega)}=\dfrac{-\omega^2}{-\omega^2+3j\omega+2}$

$\therefore \dot U_m=H(j\omega)\dot U_{sm}=-\dfrac{-\omega^2}{\omega^2+3j\omega+2}\,3\sqrt{2}=2j$ V

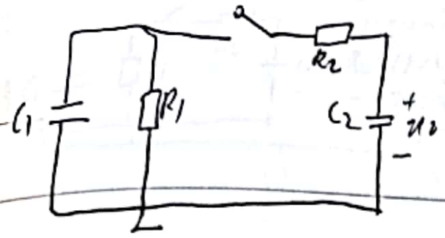
$\therefore u(t)=2\cos(\sqrt{2}t+90^\circ)$

② $H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6}$

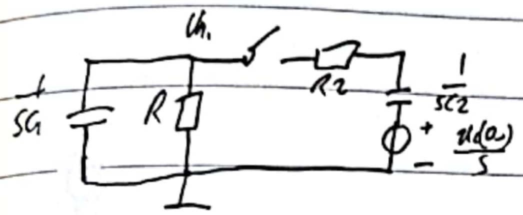
$H(s)=H(j\omega)|_{j\omega=s}=\dfrac{s}{s^2+5s+6}=-\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{3}{s+3}$

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=[-2e^{-2t}+3e^{-3t}]\varepsilon(t)$

11-1



$C_1=0.5\mu F$ $C_2=2\mu F$, $R_1=4k\Omega$, $R_2=1k\Omega$.
$u_2(0_-)=50V$ t=0时开关闭合,求t>0时u_2

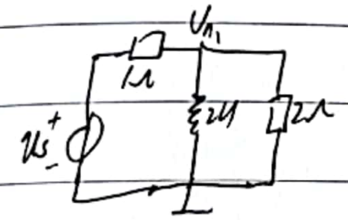


$$U_{n1}(sC+\frac{1}{R}+\frac{1}{R+\frac{1}{sC_2}})=\frac{u_c(0_-)}{s}\frac{1}{R_2+\frac{1}{sC_2}}$$

$$U_{n1}(0.5\times10^{-3}s+\frac{1}{4\times10^3}+\frac{2s}{2s+1}\times10^{-3})=\frac{50}{s}-\frac{1}{10^3+\frac{1}{2s}\times10^3}$$

$$U_2=U_{n1}\frac{\frac{1}{sC_2}}{R_2+\frac{1}{sC_2}}+\frac{u_c(0_-)}{s}$$

11-2



$$\frac{U_{n1}}{1}+\frac{U_{n1}}{2s}+\frac{U_{n1}}{2}=\frac{U_s}{1}.$$

$$U_{n1}=\frac{2s}{3s+1}\frac{1}{s+2}=\frac{A_1}{(s+\frac{1}{3})}+\frac{A_2}{s+2}$$

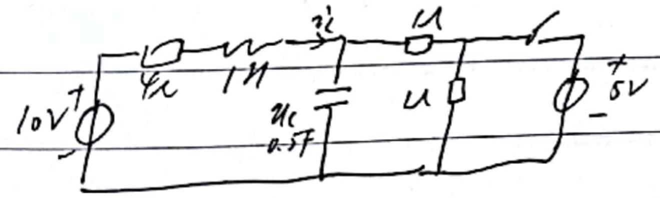
$$A_1=\lim_{s\to-\frac{1}{3}}\frac{2s}{3(s+\frac{1}{3})(s+2)}(s+\frac{1}{3})=-0.133V.$$

$$A_2=\lim_{s\to-2}\frac{2s}{(3s+1)(s+2)}(s+2)=\frac{-4}{-5}=0.8V$$

$$U_n=\frac{-0.133}{s+\frac{1}{3}}+\frac{0.8}{s+2}$$

$$u(t)=-0.133e^{-\frac{1}{3}t}+0.8e^{-2t}.$$

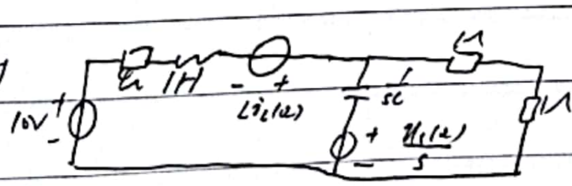
11-6 双戊 除源法 电压源=短路 电流源=断路.



开路稳态 $i_L(0_-)=\frac{10V}{5\Omega}-\frac{5V}{5\Omega}=1A$

$u_c(0_-)=10V-4\times1=6V.$

t>0时



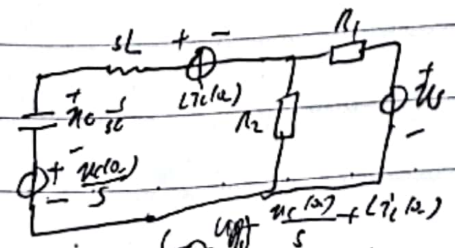
$$\frac{\frac{10+Li_L(0_-)}{4+s}+\frac{u_c(0_-)}{s}\cdot sC}{\frac{1}{4+s}+sC+\frac{1}{2}}=\frac{6s^2+26s+20}{s(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+2}+\frac{A_3}{s+3}$$

$A_1=\frac{10}{3}$
$A_2=4V$
$A_3=-\frac{4}{3}V.$

$$u_c(t)=\frac{10}{3}+4e^{-2t}+\frac{4}{3}e^{-3t}.$$

11-10



$$\frac{U_{n1}-\frac{u_c(0_-)}{s}+Li_L(0_-)}{\frac{1}{sC}+sL}+\frac{U_{n1}}{R_2}+\frac{U_{n1}-U_s}{R_1}=0.$$

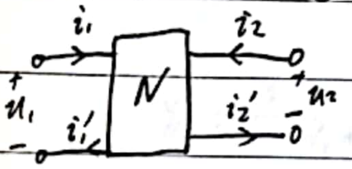
$$U_{n1}=\frac{\frac{\frac{u_c(0_-)}{s}-Li_L(0_-)}{\frac{1}{sC}+sL}+\frac{U_s}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{\frac{1}{sC}+sL}}=\frac{6s^2+3s+7}{s^2+3s+2}$$

$$I_L(s)=\frac{U_{n1}-\frac{u_c(0_-)}{s}+Li_L(0_-)}{sL+\frac{1}{sC}}\quad\frac{u_c(s)}{s}=\frac{14}{s+1}-\frac{14}{s+2}=14e^{-t}-14e^{-2t}.$$

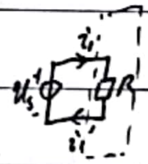
第十二章 二端口网络

① 二端口网络：一个网络包括电能或电信号的一个输入端口和一个输出端口。

人们只考虑端口的对外部特性，即端口上的电压电流，而对其内部构造完全不知，即将二端口网络视为一个电路元件。我们研究
- ① 通过内部构造，研究端口上电流电压的关系和其它技术参数。→网络分析
- ② 根据对二端口网络的需要，用尽量简单的原理制造二端口网络。→网络综合
- ③ 研究二端口网络与电源和负载相连时需分析的问题
- ④ 二端口网络之间相互联结的规律



$$\begin{cases} i_1 = i_1' \\ i_2 = i_2' \end{cases}$$ —定的



只是省略了，但还是有的
所以 $i_1 = i_1'$ 一定的

本章一般研究线性无独立源二端口网络 （含受控源则可等效为无独立源＋受控电源代替）

网络分析的方法即建立端口方程 端口电压 u_1, u_2 与端口电流 i_1, i_2，其中任意两个变量作为自变量，任意两个为因变量，组成六种线性联立方程 （仅研究前四种）

① Y参数方程（又名导纳参数方程） 以 $\dot U_1 \dot U_2$ 为自变量 $\dot I_1 \dot I_2$ 为因变量.

$$\begin{cases} \dot I_1 = Y_{11}\dot U_1 + Y_{12}\dot U_2 \\ \dot I_2 = Y_{21}\dot U_1 + Y_{22}\dot U_2 \end{cases}$$

② Z参数方程（又名阻抗参数方程） 以 $\dot I_1 \dot I_2$ 为自变量，$\dot U_1 \dot U_2$ 为因变量

$$\begin{cases} \dot U_1 = Z_{11}\dot I_1 + Z_{12}\dot I_2 \\ \dot U_2 = Z_{21}\dot I_1 + Z_{22}\dot I_2 \end{cases}$$

③ T参数方程（又名传输参数方程） 以 $\dot U_2, \dot I_2$ 为自变量，$\dot U_1 \dot I_1$ 为因变量 （transfer 传输）

$$\begin{cases} \dot U_1 = T_{11}\dot U_2 + T_{12}(-\dot I_2) \\ \dot I_1 = T_{21}\dot U_2 + T_{22}(-\dot I_2) \end{cases}$$

④ H参数方程（又名混合参数方程） 以 $\dot U_2, \dot I_1$ 为自变量，以 $\dot U_1 \dot I_2$ 为因变量 （hybrid 混合）

$$\begin{cases} \dot U_1 = H_{11}\dot I_1 + H_{12}\dot U_2 \\ \dot I_2 = H_{21}\dot I_1 + H_{22}\dot U_2 \end{cases}$$

② 导纳参数矩阵(Y参数矩阵)

$$\begin{cases}\dot I_1 = Y_{11}\dot U_1 + Y_{12}\dot U_2 \\ \dot I_2 = Y_{21}\dot U_1 + Y_{22}\dot U_2\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}\dot I_1\\ \dot I_2\end{bmatrix} = Y\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot U_2\end{bmatrix} \qquad Y=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}$$

Y_{11}, Y_{21} 即端口2短路时(即$\dot U_2=0$时), $\dot I_1$和$\dot I_2$与$\dot U_1$的比值

$$Y_{11}=\frac{\dot I_1}{\dot U_1}\Big|_{\dot U_2=0} \qquad Y_{21}=\frac{\dot I_2}{\dot U_1}\Big|_{\dot U_2=0}$$

Y_{12}, Y_{22} 即端口1短路时 (即$\dot U_1=0$时), $\dot I_1$和$\dot I_2$与$\dot U_2$的比值

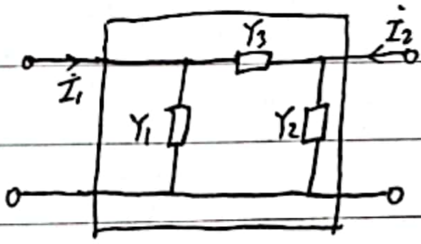
$$Y_{12}=\frac{\dot I_1}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0} \qquad Y_{22}=\frac{\dot I_2}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0}$$

如果一个网络电气对称(即结构对称且参数对称),则输入输出端口互换,外特性不变

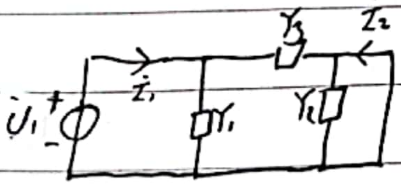
若电气对称 则 $\begin{cases}Y_{11}=Y_{22}\\ Y_{12}=Y_{21}\end{cases}$

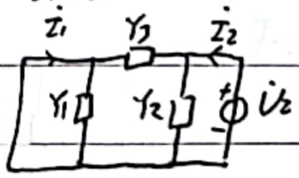
但满足 $\begin{cases}Y_{11}=Y_{22}\\ Y_{12}=Y_{21}\end{cases}$ 未必一定电气对称

例1: 求该二端口网络的Y参数矩阵



$$Y_{11}=\frac{\dot I_1}{\dot U_1}\Big|_{\dot U_2=0}=Y_1+Y_3$$
$$Y_{21}=\frac{\dot I_2}{\dot U_1}\Big|_{\dot U_2=0}=-Y_3$$
$$Y_{12}=\frac{\dot I_1}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0}=-Y_3$$
$$Y_{22}=\frac{\dot I_2}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0}=Y_2+Y_3$$





令$\dot U_2=0$ $\quad \dot I_1=\dot U_1 Y_1$

$\dot I_3'=\dot U_1 Y_3$

$$Y_{11}=\frac{\dot U_1 Y_1+\dot U_1 Y_3}{\dot U_1}=Y_1+Y_3$$

$$Y_{21}=\frac{-\dot I_3}{\dot U_1}=-Y_3$$

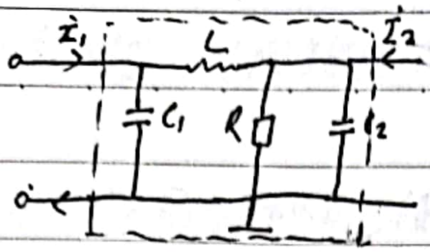
$\dot I_2'=\dot U_2 Y_2$

$\dot I_3'=\dot U_2 Y_3$

$$Y_{12}=\frac{\dot I_1}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0}=\frac{-\dot U_2 Y_3}{\dot U_2}=-Y_3$$

$$Y_{22}=\frac{\dot I_2}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0}=\frac{\dot U_2 Y_2+\dot U_2 Y_3}{\dot U_2}=Y_2+Y_3$$

例2：



求该二端口网络的Y参数矩阵

$$Y_{11}=\frac{\dot I_1}{\dot U_1}\Big|_{\dot U_2=0} = j\omega C+\frac{1}{j\omega L}$$

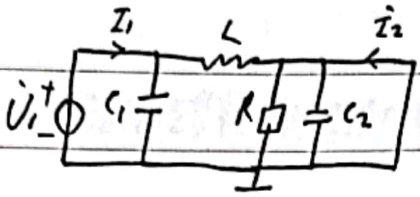
$$Y_{21}=\frac{\dot I_2}{\dot U_1}\Big|_{\dot U_2=0} = -\frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_{12}=\frac{\dot I_1}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0} = -\frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_{22}=\frac{\dot I_2}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0} = \frac{1}{R}+j\omega C_2+\frac{1}{j\omega L}$$

令

令 $\dot U_2=0$



$$\dot I_1 = \frac{\dot U_1}{\frac{1}{j\omega C}}+\frac{\dot U_1}{j\omega L} = j\omega C\dot U_1+\frac{\dot U_1}{j\omega L}$$

$$\dot I_2 = -\frac{\dot U_1}{j\omega L}$$

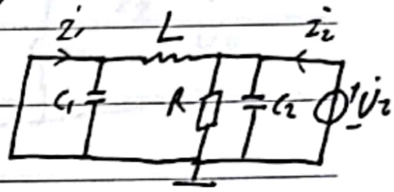
$$Y_{11}=\frac{\dot I_1}{\dot U_1}\Big|_{\dot U_2=0} = j\omega C+\frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_{21}=\frac{\dot I_2}{\dot U_1}\Big|_{\dot U_2=0} = \frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_{12}=\frac{\dot I_1}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0} = -\frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_{22}=\frac{\dot I_2}{\dot U_2}\Big|_{\dot U_1=0} = \frac{1}{j\omega L}+\frac{1}{R}+j\omega C.$$

令 $\dot U_1=0$



$$\dot I_2 = \frac{\dot U_2}{j\omega L}+\frac{\dot U_2}{R}+j\omega C\dot U_2$$

$$\dot I_1 = -\frac{\dot U_2}{j\omega L}$$

③阻抗参数矩阵（Z参数矩阵）

$$\begin{cases}\dot U_1 = Z_{11}\dot I_1+Z_{12}\dot I_2\\ \dot U_2 = Z_{21}\dot I_1+Z_{22}\dot I_2\end{cases}$$

④传输参数矩阵（T参数矩阵 transfer）

$$\begin{cases}\dot U_1 = T_{11}\dot U_2+T_{12}(-\dot I_2)\\ \dot I_1 = T_{21}\dot U_2+T_{22}(-\dot I_2)\end{cases}$$

令端口2开路 $\begin{cases}Z_{11}=\frac{\dot U_1}{\dot I_1}\Big|_{\dot I_2=0} = \\ Z_{21}=\frac{\dot U_2}{\dot I_1}\Big|_{\dot I_2=0} = \end{cases}$

令端口1开路 $\begin{cases}Z_{12}=\frac{\dot U_1}{\dot I_2}\Big|_{\dot I_1=0} = \\ Z_{22}=\frac{\dot U_2}{\dot I_2}\Big|_{\dot I_1=0} = \end{cases}$

令端口2开路 $\begin{cases}T_{11}=\frac{\dot U_1}{\dot U_2}\Big|_{\dot I_2=0} = \\ T_{21}=\frac{\dot I_1}{\dot U_2}\Big|_{\dot I_2=0} = \end{cases}$

令端口短路 $\begin{cases}T_{12}=\frac{\dot U_1}{-\dot I_2}\Big|_{\dot U_2=0} = \\ T_{22}=\frac{\dot I_1}{-\dot I_2}\Big|_{\dot U_2=0} = \end{cases}$

⑤混合参数矩阵（H参数矩阵）

$$\begin{cases}\dot U_1 = H_{11}\dot I_1+H_{12}\dot U_2\\ \dot I_2 = H_{21}\dot I_1+H_{22}\dot U_2\end{cases}$$

端口2短路 $\begin{cases}H_{11}=\frac{\dot U_1}{\dot I_1}\Big|_{\dot U_2=0} = \\ H_{21}=\frac{\dot I_2}{\dot I_1}\Big|_{\dot U_2=0} = \end{cases}$

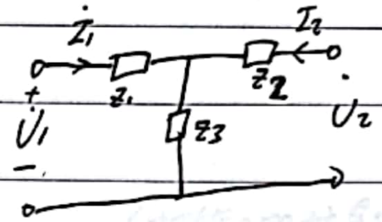
端口1开路 $\begin{cases}H_{12}=\frac{\dot U_1}{\dot U_2}\Big|_{\dot I_1=0} = \\ H_{22}=\frac{\dot I_2}{\dot U_2}\Big|_{\dot I_1=0} = \end{cases}$

① 二端口网络等效电路. (网络综合, 即已知二端口网络的参数做出其等效电路)

1) 当电路元件(二端口网络)是互易的时候：最简等效电路 T形电路或Π形电路.

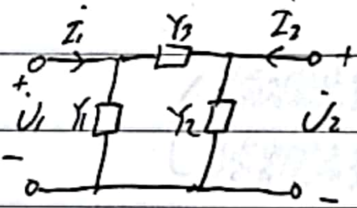
(简单理解 当$\dot U_1=\dot U_2$时$\dot I_1=\dot I_2$) (互易的特点 $Z_{12}=Z_{21}$, 故三个独立参数, 三个元件即可表示)

当已知网络的阻抗参数即Z参数, 则选用T形等效电路



$$\begin{cases} Z_1 = Z_{11}-Z_{12} \\ Z_2 = Z_{22}-Z_{12} \\ Z_3 = Z_{12} \end{cases}$$

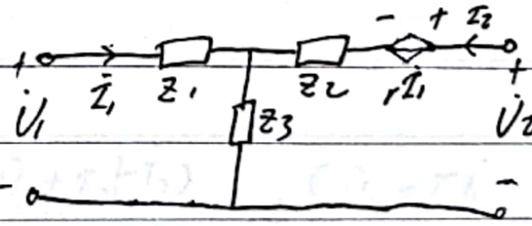
当已知网络的导纳参数即Y参数, 则选用Π形等效电路



$$\begin{cases} Y_1 = Y_{11}+Y_{12} \\ Y_2 = Y_{22}+Y_{12} \\ Y_3 = -Y_{12} \end{cases}$$

2) 当二端口网络非互易的时候. 则四个独立参数 (故3个阻抗/导纳外加一个受控源)

当已知网络的阻抗参数即Z参数, 则T形等效电路



$$\begin{cases} \dot U_1 = Z_1\dot I_1 + Z_3(\dot I_1+\dot I_2) = (Z_1+Z_3)\dot I_1 + Z_3\dot I_2 \\ \dot U_2 = r\dot I_1 + \dot I_2 Z_2 + (\dot I_2+\dot I_1)Z_3 = (r+Z_3)\dot I_1 + (Z_2+Z_3)\dot I_2 \end{cases}$$

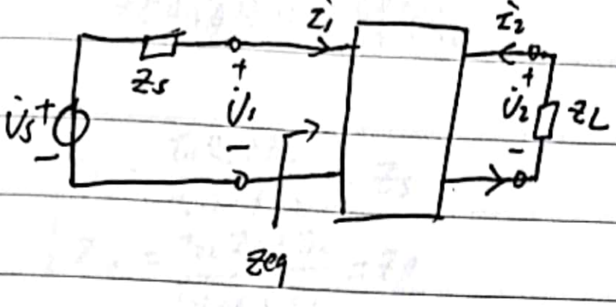
$$\therefore \begin{cases} Z_{11} = Z_1+Z_3 \\ Z_{12} = Z_3 \\ Z_{21} = r+Z_3 \\ Z_{22} = Z_2+Z_3 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} Z_1 = Z_{11}-Z_{12} \\ Z_2 = Z_{22}-Z_{12} \\ Z_3 = Z_{12} \\ r = Z_{21}-Z_{12} \end{cases}$$

当然：受控源也可以放在输入端口 但需按方法再求一下

⑦二端口网络与电源和负载的连接

1) 输入阻抗

$Z_i = Z_{eq} = \dfrac{T_{11}Z_L+T_{12}}{T_{21}Z_L+T_{22}}$



∴ 二端口的输入阻抗 $Z_i = Z_{eq} = \dfrac{\dot U_1}{\dot I_1} = \dfrac{T_{11}Z_L+T_{12}}{T_{21}Z_L+T_{22}}$

(由于输入阻抗是 $Z_i=\dfrac{\dot U_1}{\dot I_1}$ 是 $\dot U_1$ 与 $\dot I_1$ 的关系，故可用传输参数确定)

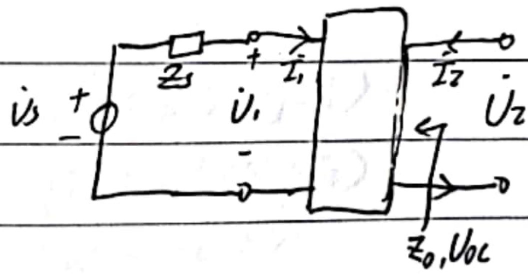
即上图等效于

∴ $\dot U_1 = \dfrac{\dot U_s Z_{eq}}{Z_s+Z_{eq}}$　　$\dot I_1 = \dfrac{\dot U_s}{Z_s+Z_{eq}}$

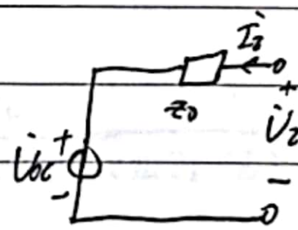
∴ Z_{eq} 可以显著影响端电压 $\dot U_1$.

(输入阻抗受负载影响，输出阻抗受电源内阻影响)

2) 输出阻抗



电路等效于



计算开路电压 $\dot U_{oc}$ 则令 $\dot I_2=0$

$\begin{cases}\dot U_1 = T_{11}\dot U_2 + T_{12}(-\dot I_2)\\ \dot I_1 = T_{21}\dot U_2 + T_{22}(-\dot I_2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot U_1 = T_{11}\dot U_2\\ \dot I_1 = T_{21}\dot U_2\end{cases}$

$\dot U_1 = \dot U_s - Z_s\dot I_1$

∴ $\dot U_{oc} = \dot U_2 = \dfrac{\dot U_s}{T_{21}Z_s+T_{11}}$

计算输出等效阻抗 $Z_0 = \dfrac{\dot U_2}{\dot I_2}\Big|_{\dot U_s=0} = \dfrac{T_{22}Z_s+T_{12}}{T_{21}Z_s+T_{11}}$

然后 $\dot U_2 = \dfrac{\dot U_s Z_L}{Z_0+Z_L}$　　$\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot I_1\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}\dot U_2\\ -\dot I_2\end{bmatrix}$

3) 特性阻抗

使二端口的输入阻抗=电源内阻抗

输出阻抗=负载阻抗

即 $\begin{cases} Z_{eq}=\dfrac{T_{11}Z_L+T_{12}}{T_{21}Z_L+T_{22}}=Z_S \\ Z_0=\dfrac{T_{22}Z_S+T_{12}}{T_{21}Z_S+T_{11}}=Z_L \end{cases}$ Z_S 为电源内阻抗 Z_L 为负载阻抗.

则 $Z_S=\sqrt{\dfrac{T_{11}T_{12}}{T_{21}T_{22}}}$ $Z_L=\sqrt{\dfrac{T_{22}T_{12}}{T_{21}T_{11}}}$

则定义这个 $Z_{C1}=Z_S=\sqrt{\dfrac{T_{11}T_{12}}{T_{21}T_{22}}}$ 为输入端口特性阻抗 则 $Z_S=Z_i$

$Z_{C2}=Z_L=\sqrt{\dfrac{T_{22}T_{12}}{T_{21}T_{11}}}$ 为输出端口特性阻抗 则 $Z_L=Z_0$

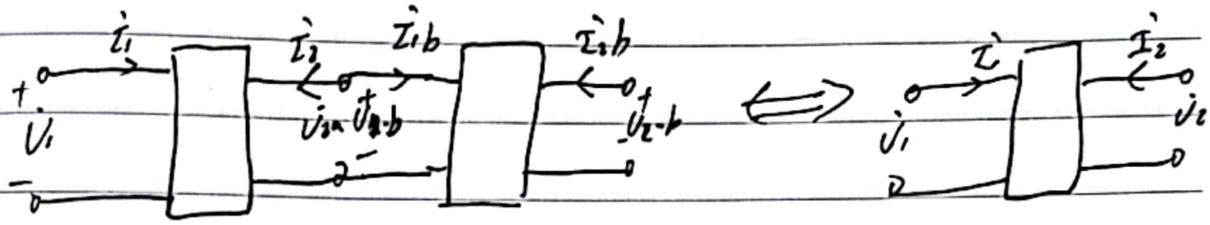
4) 转移函数 (输出电压与输入电压关系)

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_S}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1=T_{11}\dot{U}_2+T_{12}(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1=T_{21}\dot{U}_2+T_{22}(-\dot{I}_2) \\ \dot{U}_S=Z_S\dot{I}_1+\dot{U}_1 \\ \dot{U}_2=-Z_L\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\therefore H(j\omega)=\frac{Z_L}{T_{22}Z_S+T_{12}+Z_L(T_{21}Z_S+T_{11})}$$

⑧ 二端口网络的级联. (使用传输参数)



则等效为一个二端口网络

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^a & T_{12}^a \\ T_{21}^a & T_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}^b & T_{12}^b \\ T_{21}^b & T_{22}^b \end{bmatrix}$$

No: Date: . .

第十二章 电网络的图论分析

1. 图论是一门研究由点和线组成的集合,即拓扑图。

电网络即研究将电路抽象成节点和支路组成的拓扑图。

2. 定义概念

图:节点与支路的集合

路径:两个节点之间的支路集合

回路:闭合路径

树:包含全部节点但不形成闭合回路的连通子图叫树

树枝:树的支路.

连支:除了树支的其余支路

n个节点的树,包含(n-1)个树支

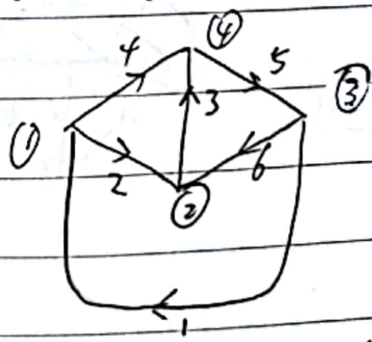
3. 关联矩阵 (又称:节点支路关联矩阵)

$$A' = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ \left[\begin{matrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix}\right] \end{array} \to 支路$$

↓ 各节点

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & 支路j背离节点a \\ -1 & 支路j指向节点a \\ 0 & 支路j与节点a不相连. \end{cases}$$

例



$$A' = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{matrix}\right] \end{array}$$

将A'的任意一行消去,则得到的A叫作关联矩阵,又叫作节点支路关联矩阵。

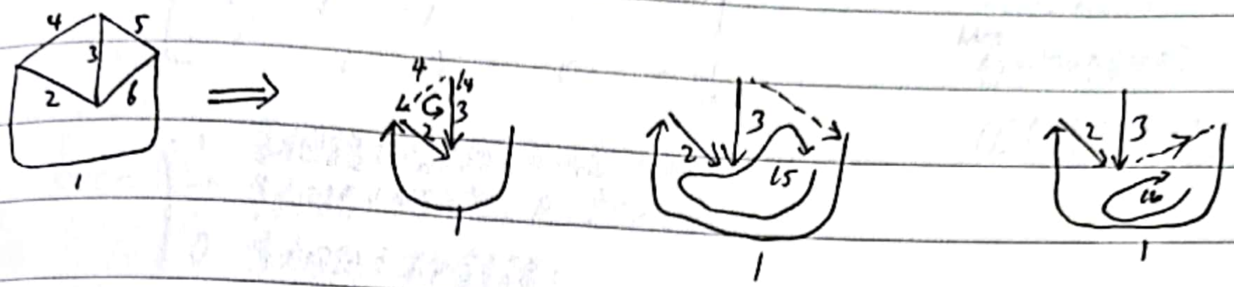
关联矩阵与用方程描述电路的系数矩阵相同

$$\begin{cases} -i_1+i_2+i_4=0 \\ -i_2+i_3-i_6=0 \\ i_1-i_5+i_6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{matrix} AI=0 \\ U=A^T U_n \end{matrix}$$

U支路电压 U_n为节点电压

No: Date :

④基本回路：一个连支+一个树支组成一个基本回路.
回路方向为连支方向

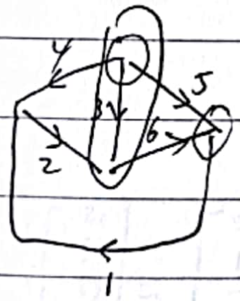


$$\begin{cases} l_4: & u_4+u_2-u_3=0 \\ l_5: & u_5+u_1+u_2-u_3=0 \\ l_6: & u_6+u_1+u_2=0 \end{cases}$$

⑤割集：将连通图移去部分支路变为非连通图。
割集：移去此集合的全部支路，则此图变为分离的两部分
留下此集合的任意一条支路，则剩下的图连通
（由一条树支和必要的连支组成）

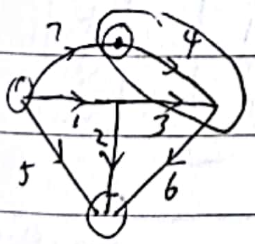
基本割集数 = 树支数 = 节点数 − 1

例：



的基本割集：∴ 3个基本割集 （取两个独立节点和一个支路）

$$\begin{cases} C_1: i_3+i_4+i_5=0 \\ C_2: i_1-i_5-i_6=0 \\ C_3: i_2-i_4-i_5-i_6=0. \end{cases}$$



的基本割集：∴ 4个基本割集 （取三个独立节点和一个支路）

$$\begin{cases} C_1: i_4-i_7=0 \\ C_2: i_1+i_7+i_5=0 \\ \cancel{C_3: -i_5-i_2-i_1=0} \\ C_4: i_7+i_3=i_6. \end{cases}$$

※ 考试方法：用一组独立电压列写支路电压 → 基本回路方程组
用一组独立电流列写支路电流 → 基本割集方程组

⑥ 基本回路矩阵

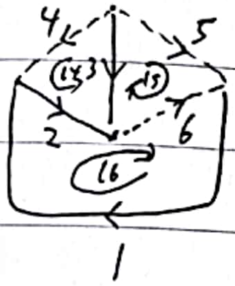
$$B=\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline l_4 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ l_5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ l_6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

列为全部支路

háng
行为连支与树构成的回路

(回路以编号连支)

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & 基本回路i包含支路j，且两者方向相同\\ -1 & 基本回路i包含支路j，且两者方向相反\\ 0 & 基本回路i不包含支路j\end{cases}$$



用基本回路矩阵表示基尔霍夫定律：KVL：$BU=0$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

KCL：$I=B^T I_l$　　　I_l即全部连支电流

$$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\\i_4\\i_5\\i_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_4\\i_5\\i_6\end{bmatrix}$$

（原理：全部的连支是一组独立变量，可以用来表示全部支路电流）

⑦ 基本割集矩阵

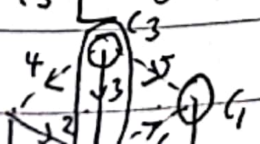
列为全部支路

háng
行为基本割集

$$C=\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline C_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ C_2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ C_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$C_{ij}=\begin{cases}1 & 基本割集包含支路，且方向相同\\ -1 & 基本割集包含支路，且方向相反\\ 0 & 不包含.\end{cases}$$

例如：



的基本割集矩阵

⇒ 割集：先找出树，1个树支+若干连支=一个割集，

对1树枝 +5.6.
2树枝 +4.5.6
3树枝 +4.5

方向为树枝方向的方向/背离闭合面

No: Date :

用基本割集矩阵表基尔霍夫定律：

KCL： $CI=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&-1&-1 \\ 0&1&0&-1&-1&-1 \\ 0&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\\ i_5\\ i_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$

KVL $U=C^TU_t$

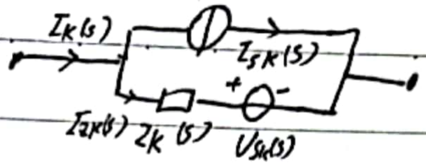
U_t 为树枝电压

$$\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ -1&-1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3 \end{bmatrix}$$

$u_4=-u_1-u_2$
$u_5=u_1+u_3$
$u_6=u_2-u_3$

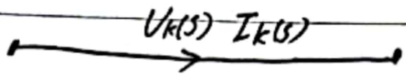
综上： 关联矩阵 A 节点与支路的关系
基本回路矩阵 B 基本回路与支路关系 → 基本回路矩阵：一组支路电压表其它支路电压
基本割集矩阵 C 基本割集与支路关系 → 一组支路电流表其它支路电流

三者关系
$$\begin{cases} AB^T=0 \\ BC^T=0 \end{cases}$$

⑧广义支路：将支路定义为  的形式

（复频域形式）

$\Downarrow$



故第k条支路的广义支路方程 $U_k = Z_k I_{zk} + U_{sk}$

$= Z_k(I_k - I_{sk}) + U_{sk}$

$= Z_k I_k - Z_k I_{sk} + U_{sk}$.

矩阵形式 $U = Z_b I - Z_b I_s + U_s$ ①

（对偶）$I = Y_b U - Y_b U_s + I_s$ ②

U为支路电压列向量

I为支路电流列向量

U_s, I_s为支路源电压源电流列向量

$Z_b = diag[Z_1, Z_2 \ldots Z_b]$是由b条支路阻抗组成的对角矩阵，称为支路阻抗矩阵

$Y_b = diag[Y_1, Y_2 \ldots Y_b]$是支路导纳矩阵

注：当广义支路只含电流源，无电压源，或$Z_k \to \infty$时　不能使用①的电压支路方程　只能用② $I = Y_b U - Y_b U_s + I_s$

只含电压源，无电流源或$Z_k \to 0$时　只能用①，不能用②

支路导纳矩阵　$Y_b = diag[1, 2, 3]$

节点导纳矩阵　$Y_n = A Y_b A^T$

节点注入电流列向量　$I_{sn} = A Y_b U_s - A I_s$

节点电压方程　$Y_n U_n = I_{sn}$

广义支路电压　$U = A^T U_n$

广义支路电流　$I = Y_b U - Y_b U_s + I_s$

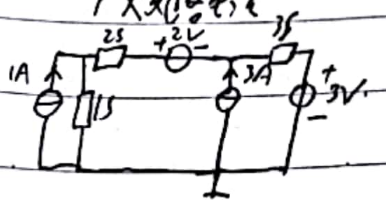
[U_s, I_s支路源电压源电流的方向

I_s是流出节点往外指为正

U_s是向节点往里指为正

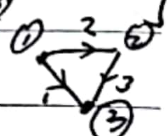
原理见本页下图

例：



求广义支路电压电流

∴ ①按照广义支路定义 做出网络的图



②关联矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

支路导纳矩阵 $Y_b = diag[1, 2, 3]$

支路源电压向量 $U_s = [0, 2, 3]^T$

支路源电流向量 $I_s = [-1, 0, -3]^T$

节点导纳矩阵 $Y_n = A Y_b A^T$

节点注入电流向量 $I_{sn} = A Y_b U_s - A I_s$

节点电压 $Y_n U_n = I_{sn}$

广义支路电压 $U = A^T U_n$

第十四章 非线性电路

① 线性电路：假定各电路元件的参数与电压电流无关，则列出线性方程组（前十三章），电路为线性电路。

非线性电路：电路元件不是常量，或者或多或少依赖于电压电流，则非线性电路

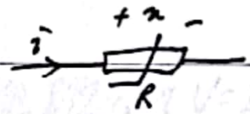
非线性电路存在很多复杂现象：波形畸变现象，跳变现象，振荡现象，混沌现象。

非线性电路研究无法使用：
- 叠加定理　戴维南定理　相量分析法
- 复频域分析法　卷积法　……
- 全响应也不等于零输入响应与零状态响应之和。

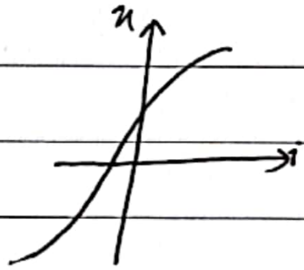
② 非线性电阻：

1) 特性方程描述：　$u=f(i)$，$i=g(u)$，$h(u,i)=0$

2) 符号描述：



特性曲线描述

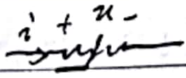


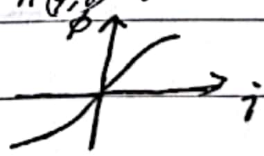
3) 静态特性　$R=\frac{u}{i}$

动态特性　$R_d=\frac{du}{di}$

③ 非线性电感

1) 特性方程　$\phi=f(i)$　$i=g(\phi)$　$h(\phi,i)=0.$

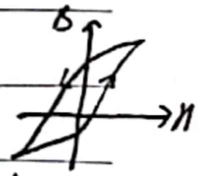




2) 静态电感　$L=\frac{\phi}{i}$

动态电感　$L_d=\frac{d\phi}{di}$

3) 磁导率 $\mu=\frac{B}{H}$　磁滞特性曲线



磁滞损耗 $P=\frac{1}{T}\int_0^T i\frac{d\phi}{dt}dt=f\oint i\,d\phi$

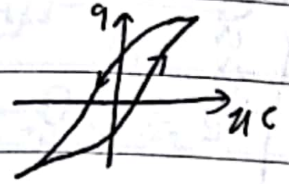
$=fAl\oint H\cdot dB=fV\oint H dB$

$V=Al$ 为铁心体积。$\oint HdB$ 即为磁滞回线面积。

④ 非线性电容

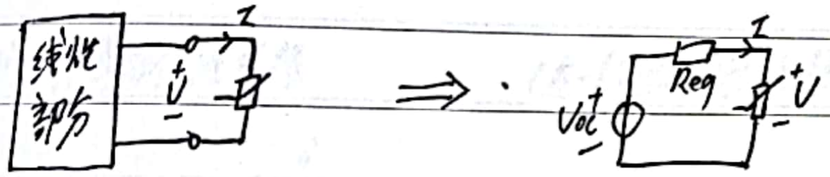
$q=f(u)$　　$u=g(q)$　　$h(u,q)=0$.

电滞损耗　$P=f\oint u_C dq=f\times$回线面积



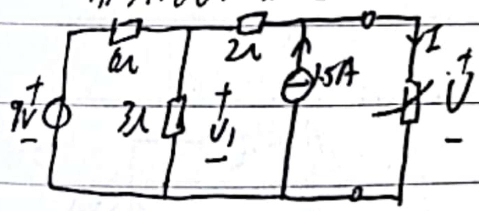
⑤ 非线性直流电路

1) 单个非线性元件电路　　　（用戴维南定理化简）

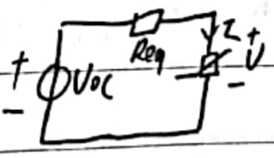


$U_{oc}=IR_{eq}+U$　　列出非线性直流电路方程.

例: 非线性电阻 伏安特性 $U=I^2-4I$. 求电压U与U_1



1) 基于叠加定理.　　电路等效为



$U_{oc}=9V$

$R_{eq}=4\Omega$　（除源法）

2)　$R_{eq}I+U=U_{oc}$

$I_1=3V$　$I_2=-3V$

$\therefore U_1=-3V$　$U_2=21V$

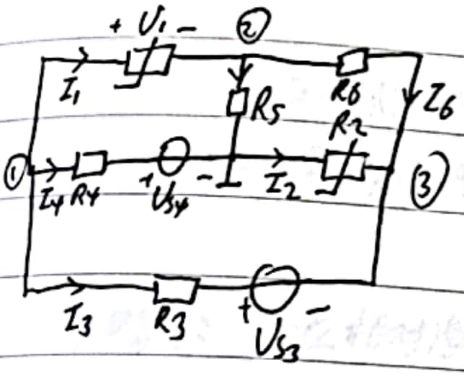
3)　根据置换定理　　用$U=-3V$与$21V$的电压源替换非线性部分.

则只有 $U_1'=0V$　　$U_1''=12V$

2) 多个非线性电阻的电路

非线性电阻压控，即电压控制电流 $I=g(U)$ → 适合列KCL（节点电压方程）

流控，即电流控制电压 $U=f(I)$ → 适合列KVL（回路电流方程）



$$\begin{cases} \dfrac{U_{n1}-U_{s4}}{R_4}+I_1+\dfrac{U_{n1}-U_{n3}-U_{s3}}{R_3}=0 \\ -I_1+\dfrac{U_{n2}}{R_5}+\dfrac{U_{n2}-U_{n3}}{R_6}=0 \\ -I_2+\dfrac{U_{n3}-U_{n1}+U_{s3}}{R_3}+\dfrac{U_{n3}-U_{n2}}{R_6}=0. \end{cases}$$

设 $I_1=g(U_1)$ $I_2=g(U_2)$

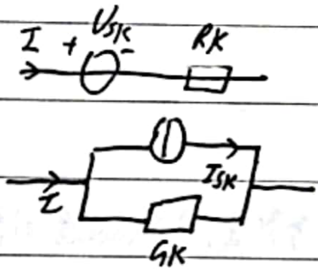
$I_1=g(U_1)=g(U_{n1}-U_{n2})$ 代入上式

$I_2=g(U_2)=g(-U_{n3})$ 代入上式

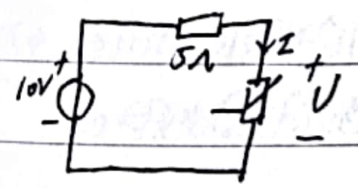
3) 折线法计算非线性电路 （在一段区间内近似认为是线性电路）

令第K段直线段直线方程 $U=U_{sk}+R_kI$

$I=I_{sk}+G_kU$

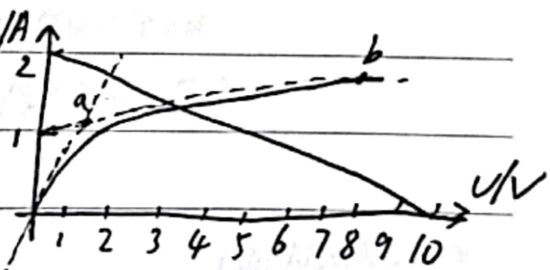


例：



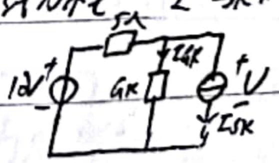
非线性电阻特性曲线如右图

a点近似(1.3V,1.1A)



解：由非线性电阻特性曲线可知，其特性可由 oa, ab 两段直线逼近

设直线方程 $I=I_{sk}+G_kU$



∵过原点和 a (1.3V, 1.1A)

∴ $I_{s1}=0$ $G_1=\frac{1.1}{1.3}=8.462\times10^{-1}S$

过 (0,1) (1.3, 1.1)

∴ $I_{s2}=1.0A$ $G_2=(1.1-1)/1.3=7.692\times10^{-2}S$

由KCL ∴ $I_{Gk}+I_{sk}-I=\frac{10-U}{5}+G_kU+I_{sk}=0$

∴ $U=\frac{2-I_{sk}}{0.2+G_k}$ 将 I_{s1}, G_1 代入 ∴ $U=1.908V$ $>1.3V$

$I=I_{s2}+G_2U=1.278A$ 若 I_{s2}, G_2 代入 ∴ $U=3.6...V$

⑥ 周期性电源作用下的非线性电路

1) 惯性元件：即在一个周期内参数不变的元件 (即尽管该元件非线性，但若它是惯性元件，则仍可用线性电路分析方法)

但惯性元件不可使用叠加定理与齐性定理，因为若电压电流有效值发生改变，响应是非线性改变。

2) 畸变：响应相对激励波形发生巨大非线性变化

例：若某非惯性元件 电阻动态特性 $i=au^3$，施加 $u=U_m\sin(\omega t)$ 正弦电压

则电流：

$$i=a[U_m\sin(\omega t)]^3=\frac{aU_m^3}{4}[3\sin(\omega t)-\sin(3\omega t)]$$

3) 磁通幅值与电压有效值间关系

$$\Phi_m=\frac{\sqrt{2}U}{2\pi fN}\approx\frac{U}{4.44fN}$$

⑦ 直流和交流小信号电源作用下的非线性电路 (即电路中分激励两种：直流电源与时变电源)

记作 $u=U+\Delta u$

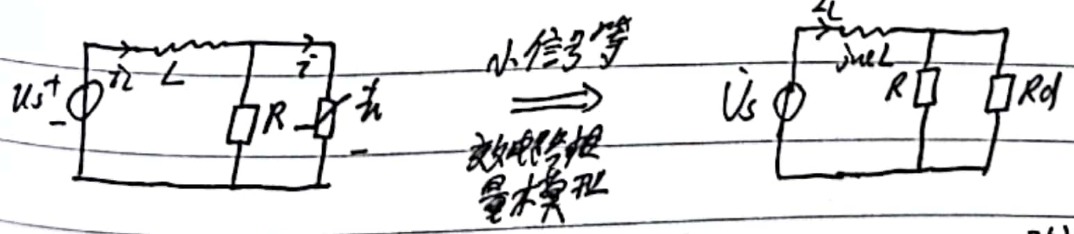
其中 由直流电源部分引起的解答叫作直流工作点(静态工作点)

由时变电源部分引起的动态电阻 $R_d=\frac{du_R}{di_R}$

动态电感 $L_d=\frac{d\phi}{di_L}$ (由于小信号时变电源

动态电容 $C_d=\frac{dq}{du_C}$ 故动态电阻近似静态特性)

例：非线性电阻特性 $u=4i^2\ (i>0)$，$L=0.8H$ $R=12\Omega$ $u_s=36+\sqrt{2}\cos(10t)$ 求 i_L.



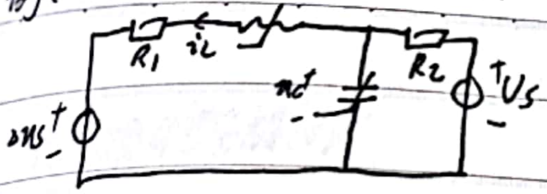
1) 计算直流工作点的电压电流 $U=4I^2=36V$ ∴$I=3A$ $I_R=\frac{36V}{12\Omega}=3A$ ∴$I_L=6A$

2) 计算小信号工作点的动态电阻 $R_d=\frac{du}{di}=8I=24\Omega$ $Z=j\omega L+\frac{RR_d}{R+R_d}=(8+8j)\Omega$.

$\Delta\dot{I}_L=\frac{\Delta\dot{U}_s}{Z}=\frac{1}{8+8j}=\frac{1}{8\sqrt{2}}\angle-45°$ ∴$\Delta i_L=0.125\cos(10t-45°)$

$i_L=I_L+\Delta i_L=6+0.125\cos(10t-45°)$

例: $V_S=9V$, $\Delta u_S=2\sqrt{2}\cos(10^6t)$, $R_1=10\Omega$ $R_2=8\Omega$ $\phi=2\times10^{-5}i_L^2$ $q=10^{-8}u_C^2$ 求u_C变化规律



1) 计算直流电源下的工作点.

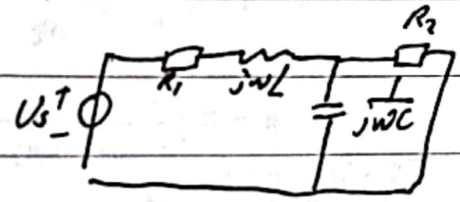
故 $U_C=5V$. $I_L=0.5A$

2) 计算交流小信号电源下的工作点.

动态电感 $L=\frac{d\phi}{di}=4\times10^{-5}I_L=2\times10^{-5}H$.

动态电容 $C=\frac{dq}{du}=2\times10^{-8}U_C=10^{-7}F$

相量分析法等效电路



$$\left(\frac{1}{R_1+j\omega L}+j\omega C+\frac{1}{R_2}\right)\dot{U}_C=\frac{\dot{U}_S}{R_1+j\omega L}=\frac{2}{10+20j}=\left(\frac{1}{10+20j}+\frac{j}{10}+\frac{1}{8}\right)\dot{U}_C$$

$\cancel{\therefore U_C=\frac{2}{10+10^6\cdot 2\times10^{-5}j}}$ $\dot{U}_C=0.57\angle-85.914^\circ$

$\therefore \Delta u_C=0.57\sqrt{2}\cos(10^6t-85.914)$

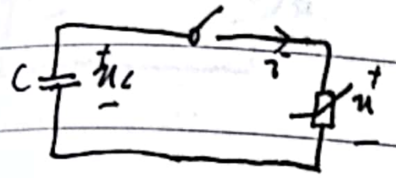
$\therefore u_C(t)=U_C+\Delta u_C=5+0.57\sqrt{2}\cos(10^6t-85.914)$

⑧ 非线性暂态电路状态方程

（讨论非线性电路中暂态响应，非线性电路分析不能使用叠加定理和

只能使用微分方程求解.

（看怎么求微分方程的通解）



设 $u_C(0_-)=U_0$，非线性电阻伏安特性 $i=au+bu^2$

$t=0$ 时开关接通，求 $t>0$ 时电压 u_C

$$i=-C\frac{du_C}{dt}=au_C+bu_C^2$$

$$\therefore \frac{du_C}{dt}=-\frac{a}{C}u_C-\frac{b}{C}u_C^2$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u_C}\right)\cancel{+}\frac{a}{Cu_C}=-\frac{b}{C}$$

$$\frac{1}{u_C}=-\frac{b}{a}+Ke^{\frac{a}{C}t}$$

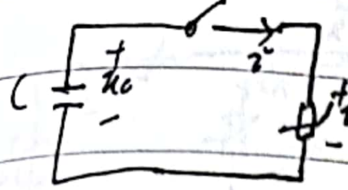
$$\frac{1}{u_C(0_+)}=\frac{1}{u_C(0_-)}=-\frac{b}{a}+K=\frac{1}{U_0}$$

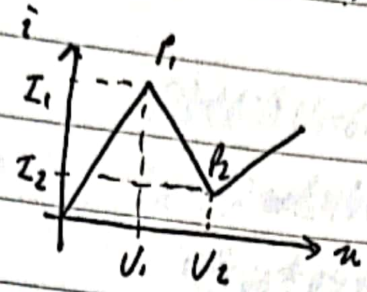
$$\therefore u_C=\left[-\frac{b}{a}+\frac{a+bU_0}{aU_0}e^{\frac{a}{C}t}\right]^{-1}$$

微分方程的另一求解：

⑪ 分段线性的暂态电路

(将非线性元件，用若干段线性描述)





$$\begin{cases} C\dfrac{du}{dt}=-i \\ i=g(u) \end{cases}$$

这个方程组的解的动态点

1) 确定动态路径 (即P区-a的特性曲线)

2) 找出平衡点　$C\dfrac{du}{dt}=-i$，得知随 $u_c\uparrow$ 动态点的移动方向，分析出平衡点

3) 由已知条件得出初始位置

4) 求各段直线方程，由方程得出等效电路模型

5) 用三要素公式处理等效模型，并计算数据

$f(t)=f_p(t)+[f(0_+)-f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

直流激励 $f_p(t)=f_p(0_+)=f(\infty)$

由三要素公式：

$u_{c_1}=u_c(\infty)+[u_c(0_+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$=2+0.5e^{0.5t}$

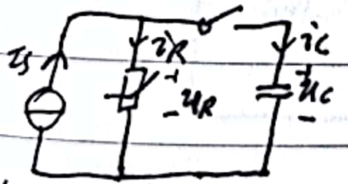
$u_{c_2}=u_c(\infty)+[u_c(0_+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$=4-e^{-0.5(t-t_1)}$

$u_{c_1}=3V$　$t=1.386$ 时刻到 P_3 点

由 $t\to\infty$ 到 P_3 点

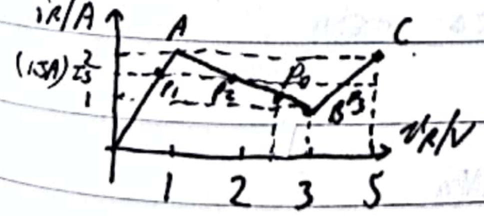
例)



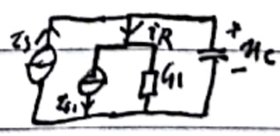
$I_s=1.5A$　$C=1F$　$u_c(0_-)=2.5V$

非线性电阻特性 如左下图，$t=0$ 时开关打开

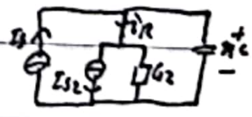
求 $t>0$ 时电容电压 u_c.



∴ AB段等效电路模型



BC段等效模型



$$\begin{cases} C\dfrac{du_c}{dt}=I_s-i_R \\ u_c=u_R \end{cases}$$

$\therefore \dfrac{du_R}{dt}=\dfrac{I_s-i_R}{C}$

$\tau=RC=\dfrac{C}{G_1}=-2S$　$G_1=-0.5S$　$I_{s1}=2.5A$

$\tau=RC=\dfrac{C}{G_2}=2S$　$G_2=0.5S$　$I_{s2}=-0.5A$

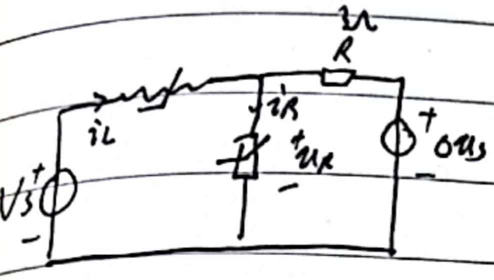
当 $i_R<I_s$ 时　$\dfrac{du_R}{dt}>0$　则有 $u_R\uparrow$ 动态点右移　当 $i_R>I_s$ 时　则有 $u_R\downarrow$ 动态点左移，P_1P_3 为平衡点

$\because u_c(0_+)=u_c(0_-)=2.5V$　∴ 初始点 P_0 点

AB段方程　$i_R=-0.5u_R+2.5$

BC段方程　$i_R=0.5u_R-0.5$

(10) 小扰动作用下的暂态电路. (使用动态电阻,动态电感 → 动态电路解决)



直流电压源 $U_S=60V$, 小扰动时源电压 $\delta u_S=3\varepsilon(t)\,V$

非线性电阻特性 $i_R=1.389\times10^{-3}u_R^2$

电感动态特性 $\phi=1.067\times10^{-3}i_L^3$, $R=3\Omega$.

求 $t>0$ 时的电压 u_R.

(1) 单独计算直流工作点时

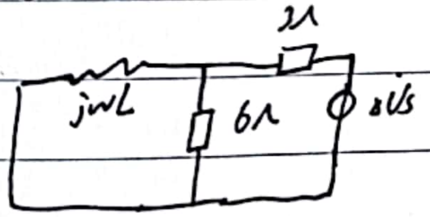
$U_R=U_S=60V$ $\quad I_R=1.389\times10^{-3}\cdot60^2\approx5A$

$I_L=I_R+\frac{U_S}{R}\approx25A$

(2) 计算动态电阻与动态电感 $\quad R_d=\left(\frac{di}{du}\right)^{-1}=6\Omega$.

$L_d=\frac{d\phi}{di}\approx2H$.

(3) 建立小信号等效电路 $\quad \tau=\frac{L}{R}$



$\delta u_R=\delta u(\infty)+[\delta u(0_+)-\delta u(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$=0+2e^{-t}V=2e^{-t}V$

$\Delta u_R(0_+)=\frac{R_d}{R+R_d}\Delta U_S=2V$ (计算此时瞬间动态电感视为开路)

$\tau=\frac{L}{R}=1s$

$\delta u_R(\infty)=0$

$\therefore u_R=\delta u_R+U_S=(60+2e^{-t})V$

第十五章 均匀传输线

① 前十四章节的都是集中参数电路模型，这章为分布参数电路模型，这是由于传输线之间存在沿线电阻，沿线电感，线间电容，线间电导。

考虑分布参数（的两种情况）
$\begin{cases} \text{电力传输电线路（500km传输线）} \\ \text{高频传输电线路（300MHz）} \end{cases}$

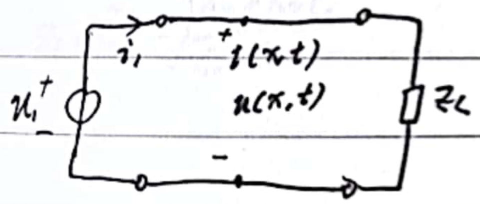
$\because v=\frac{\lambda}{T}=\lambda f \qquad \lambda=\frac{v}{f}=\frac{3\times10^8}{50}=6000km.$

$\therefore \lambda=\frac{v}{f}=\frac{3\times10^8}{3\times10^8}=1m$ ∴需要考虑

研究的分布参数
沿线电阻	R_0	Ω/m
沿线电感	L_0	H/m
线间电导	G_0	S/m
线间电容	C_0	F/m.

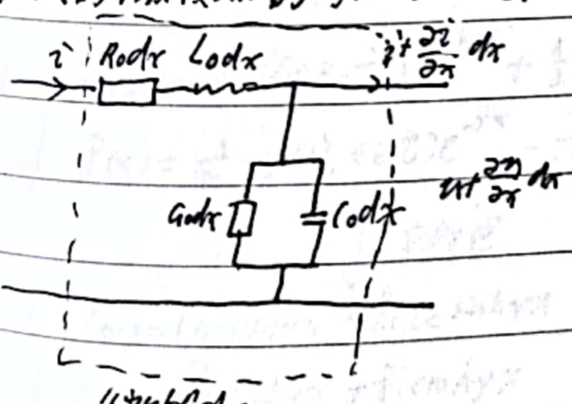
（长度为往返线长度）

② 均匀传输线的方程：既是时间的函数又是距离的函数。



均匀传输线两端上电源与负载

取位于x处的微段dx的参数电路模型.



微段dx

$$\begin{cases} u-(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx)=(R_0dx)i+(L_0dx)\frac{\partial i}{\partial t} \\ i-(i+\frac{\partial i}{\partial x}dx)=G_0dx(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx)+C_0dx\frac{\partial}{\partial t}(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx) \end{cases}$$

⇓ 整理得

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x}=R_0 i+L_0\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x}=G_0u+C_0\frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

（波动方程）
（即均匀传输线基本方程）

No:

Date :

④当输入电源为正弦稳态电源时的均匀传输线

(正弦交流电，故转化至复数相量求解)

由 $\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} -\dfrac{d\dot{U}(x)}{dx} = (R_0 + j\omega L)\dot{I}(x) \\ -\dfrac{d\dot{I}(x)}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)\dot{U}(x) \end{cases}$ $\xRightarrow{\text{通解}}$ $\begin{cases} \dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = B_1 e^{-\gamma x} + B_2 e^{\gamma x} \end{cases}$

称 $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ 为单位长度阻抗

$Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ 为单位长度导纳

其中 γ 为传播系数

$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$

γ：传播常数，α：衰减常数，β：相位常数

$\Downarrow$

Z_c 为特性阻抗或波阻抗

$Z_c = \dfrac{Z_0}{\gamma} = \sqrt{\dfrac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$

$\begin{cases} \dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \dfrac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \dfrac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x} \end{cases}$

令 $x=0$ $\begin{cases} \dot{U}_1(x) = A_1 + A_2 \\ \dot{I}_1(x) = \dfrac{A_1}{Z_c} - \dfrac{A_2}{Z_c} \end{cases}$ $\therefore A_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1)$，$A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1)$

综上 $\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) e^{-\gamma x} - \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) e^{\gamma x} \end{cases}$

$\Downarrow$ 转化

$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cosh \gamma x - \dot{I}_1 Z_c \sinh \gamma x \\ \dot{I}(x) = -\dfrac{\dot{U}_1}{Z_c} \sinh \gamma x + \dot{I}_1 \cosh \gamma x \end{cases}$

故传输线可看作一个二端口网络

其传输参数 $\begin{bmatrix} \dot{U}(x) \\ \dot{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma x & -Z_c \sinh \gamma x \\ -\dfrac{1}{Z_c} \sinh \gamma x & \cosh \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}$

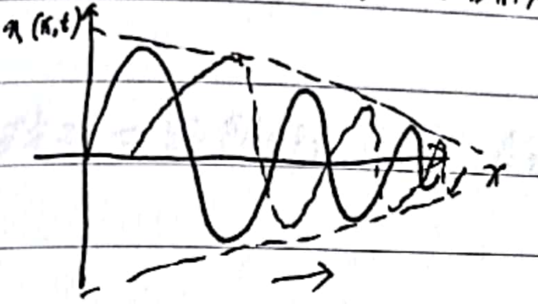
④ 均匀传输线上的行波

由③可知
$$\begin{cases} \dot U(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = \dot U^+(x) + \dot U^-(x) \\ \dot I(x) = \frac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x} = \dot I^+(x) - \dot I^-(x) \end{cases}$$

1) $\dot U^+(x) = \dot U' e^{-\gamma x} = U' e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \psi')}$

∴ $u^+(x,t)$ 的瞬时值表达式 $= \sqrt{2}\, U' e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi')$ （U'为$\dot U'$的有效值）

形状：



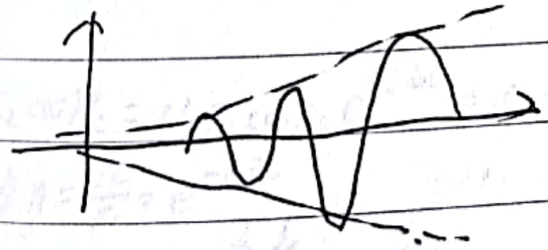
行波波速（相速） $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta}$　　$\gamma = \alpha + \beta j$（$\alpha$：衰减常数，$\beta$：相位常数）

行波波长 $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$

（波长即行波一个周期内前进的距离）

2) $\dot U^-(x) = \dot U' e^{\gamma x} = U' e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi')$

形状：



波向左传播　　波速 $v = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{\omega}{\beta}$

波长 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

3) 行波阻抗，特性阻抗 Z_c　　$Z_c = \frac{\dot U^+(x)}{\dot I^+(x)} = \frac{\dot U^-(x)}{\dot I^-(x)}$

故 $\dot U^+(x)$ 被称为入射波　　$Z_c = \frac{\dot U^+(x)}{\dot I^+(x)} = \frac{\dot U^-(x)}{\dot I^-(x)}$

$\dot U^-(x)$ 被称为反射波.

4) 反射系数 N_2　　$\dot U_2^- = N_2 \dot U_2^+$　　$\dot I_2^- = N_2 \dot I_2^+$　　$N_2 = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c}$ 是终端反射系数

④ 波的反射　　($Z_L=Z_C$)

$$\begin{cases}\dot U(x)=\dot U^{+}(x)+\dot U^{-}(x)\\ \dot I(x)=\dot I^{+}(x)-\dot I^{-}(x)\end{cases}$$

故在线路终端 $\begin{cases}\dot U_2=\dot U_2^{+}+\dot U_2^{-}\\ \dot I_2=\dot I_2^{+}-\dot I_2^{-}\end{cases}$

∴ $\dfrac{\dot U_2}{\dot I_2}=Z_L$ 为负载电阻　　$\dfrac{\dot I_2^{-}}{\dot I_2^{+}}=\dfrac{\dot U_2^{-}}{\dot U_2^{+}}=N_2=\dfrac{Z_L-Z_C}{Z_L+Z_C}$

故当负载阻抗 Z_L = 波阻抗 Z_C 时　$N_2=0$　$\begin{cases}\dot I_2^{-}=0 & \text{即反向行波为0}\\ \dot U_2^{-}=0 & \text{能量被负载完全吸收}\end{cases}$

故：可以认为波的反射是由于负载与传输线不匹配而造成的。

⑤ 自然功率

把线路传输到终端的平均功率称为自然功率 P_2

把输入传输线的平均功率称为始端输入功率 P_1

$$P_2=U_2I_2\cos\varphi_c=U_1I_1\cos\varphi_c e^{-2\alpha l}=P_1e^{-2\alpha l}$$

传输效率 $\eta=\dfrac{P_2}{P_1}=e^{-2\alpha l}$　　α 即衰减常数

衰减常数　传输线长度

$$\alpha l=\frac{1}{2}\ln\frac{P_1}{P_2}$$

⑥ 获得波阻抗 Z_c 与传播常数　　(可能会考)

$$\begin{cases}\dot U(x)=\dot U_2\cosh\gamma l+\dot I_2Z_c\sinh\gamma l\\ \dot I(x)=\dfrac{\dot U_2}{Z_c}\sinh\gamma l+\dot I_2\cosh\gamma l\end{cases}$$

∴传输线始端的输入阻抗

$Z_i=Z_c\dfrac{Z_L\cosh\gamma l+Z_c\sinh\gamma l}{\ldots}$

令终端开路 即 $Z_L=\infty$　$Z_{i0}=\dfrac{Z_c}{\tanh\gamma l}$

令终端短路 即 $Z_L=0$　$Z_{is}=Z_c\tanh\gamma l$

∴ $Z_c=\sqrt{Z_{i0}Z_{is}}$　　$\tanh\gamma l=\sqrt{\dfrac{Z_{is}}{Z_{i0}}}$

③ 给定边界条件下的电压与电流分布

已知始端电压电流

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(x) \\ \dot{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma x & -Z_c \sinh\gamma x \\ -\frac{\sinh\gamma x}{Z_c} & \cosh\gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}$$

[x为从始端到该处距离]

已知终端电压电流

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(x) \\ \dot{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma x' & Z_c \sinh\gamma x' \\ \frac{\sinh\gamma x'}{Z_c} & \cosh\gamma x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

[x'为从终端到该处的距离]

⑧ 正弦交流工作下的无损线

1) 无损线：即传输线沿线电阻，线间电导为0的传输线 ($R_0=0 \quad G_0=0$)

(附注：对于高频线路 $\omega L_0 \gg R_0$，$\omega C_0 \gg G_0$ ∴ R_0 与 G_0 可忽略)

2) 无损线的传输参数：

传播参数 $\gamma = j\omega\sqrt{L_0C_0} = j\frac{2\pi}{\lambda} = \alpha + \beta j$ $\qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

波阻抗 $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$

波速 $v = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} = 3\times10^8 = \lambda f$

传输线方程：
$$\begin{cases}\dot U(x) = \\ \dot I(x) = \end{cases}\begin{bmatrix}\cosh\gamma x & -Z_c\sinh\gamma x \\ -\frac{1}{Z_c}\sinh\gamma x & \cosh\gamma x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_1 \\ \dot I_1\end{bmatrix}$$
$\sinh\gamma x = j\sin(\beta x)$
$\cosh\gamma x = \cos(\beta x)$

无损传输线
$$\begin{cases}\dot U(x) = \\ \dot I(x) = \end{cases}\begin{bmatrix}\cos(\beta x) & -jZ_c\sin(\beta x) \\ -j\frac{\sin\beta x}{Z_c} & \cos(\beta x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_1 \\ \dot I_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot U(x) = \\ \dot I(x) = \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\beta x') & jZ_c\sin(\beta x') \\ j\frac{\sin\beta x'}{Z_c} & \cos\beta x'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_2 \\ \dot I_2\end{bmatrix}$$

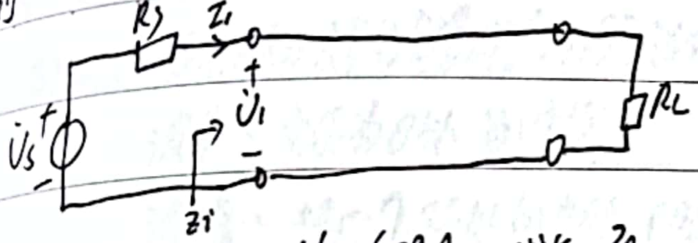
输入阻抗
$$Z_i = \frac{\dot U_1}{\dot I_1} = Z_c\frac{Z_L\cos\beta l + jZ_c\sin\beta l}{jZ_L\sin\beta l + Z_c\cos\beta l}$$

$\left(\beta l = \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi\times30}{60} = \pi\right)$

阻抗变换 当使用波长为 $\frac{\lambda}{4}$ 的无损线，则可实现阻抗变换

即将负载 Z_L 变为所需电阻 Z_i，则可用 $\frac{1}{4}$ 波长无损线，且波阻抗 $Z_c=\sqrt{Z_iZ_L}$ 即可.

例



架空无损线，波阻抗 $=600\Omega$. 线长 $30m$，正弦电压源 $u_s=10\sqrt{2}\cos(wt)$

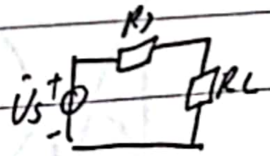
当频率 $f=5MHz$ $R_s=100\Omega$ $R_L=1000\Omega$

$$\lambda=\frac{V}{f}=\frac{3\times10^8}{5\times10^6}=60m.$$

$$\beta l=\frac{2\pi l}{\lambda}=\pi$$

输入阻抗 $Z_i=Z_c\dfrac{Z_L\cos\beta l+jZ_c\sin\beta l}{jZ_L\sin\beta l+Z_c\cos\beta l}=Z_L=1000\Omega$

∴ 等效电路



∴ $\dot{U}_1=\dfrac{R_L\dot{U}_s}{R_s+R_L}=9.09V$

$\dot{I}_1=\dfrac{\dot{U}_s}{R_s+R_L}=9.09mA$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta l & -jZ_c\sin\beta l\\ -j\dfrac{\sin\beta l}{Z_c} & \cos\beta l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}$$

$$\dot{U}_2=\dot{U}_1\cos\beta l-jZ_c\dot{I}_1\sin\beta l=-\dot{U}_1=-9.09V$$

$$\dot{I}_2=-\dot{I}_1=-9.09mA$$

⑨ 无损线上的驻波

驻波：把波腹与波节的位置都不随时间变化的波叫作驻波。

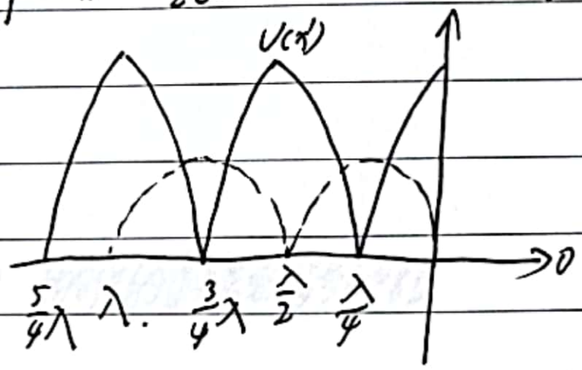
波节：电压为0处 为波节.

波腹：振动最强处为波腹（即最大）

驻波的产生条件 $\begin{cases} 1) \text{无损线} \\ 2) \text{终端开路/终端短路/负载为纯电抗元件} \end{cases}$

1) 终端开路

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos\beta x' \\ \dot{I}(x') = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin\beta x' \end{cases} \xrightarrow{\text{有效值}} \begin{cases} U(x') = U_2|\cos\beta x'| \\ I(x') = \dfrac{U_2}{Z_C}|\sin\beta x'| \end{cases}$$



即当 $x' = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda \ldots$ 时　电压有效值为0, 电压波节

电流有效值最大, 电流波腹.

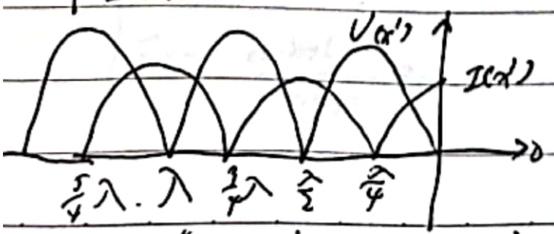
当 $x' = \frac{\lambda}{2}, \lambda \ldots$ 时　电压有效值为最大, 电压波腹

电流有效值为0, 电流波节.

等效阻抗　$Z_i(x') = jX_i = -jZ_c \cot(\beta x')$　$(\beta = \frac{2\pi}{\lambda}.)$

2) 终端短路

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = jZ_c \dot{I}_2 \sin\beta x' \\ \dot{I}(x') = \dot{I}_2 \cos\beta x' \end{cases} \xrightarrow{\text{有效值}} \begin{cases} U(x') = Z_c I_2 \sin|\beta x'| \\ I(x') = I_2 \cos|\beta x'| \end{cases}$$



∴ 当 $x' = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda \ldots$ 时 电压有效值最大

电流有效值为0.

当 $x' = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda \ldots$ 时　……

等效阻抗　$Z_i(x') = jZ_c \tan(\beta x')$　$(\beta = \frac{2\pi}{\lambda})$

3) 接纯电抗负载　　⟺ 传输线延长一段

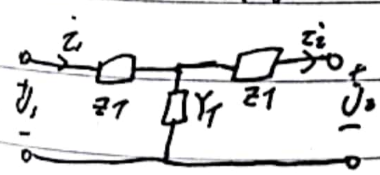
$$jZ_c\tan(\beta l)=jZ_c\tan\frac{2\pi l_0}{\lambda}=jX_L$$ 求出 l_0

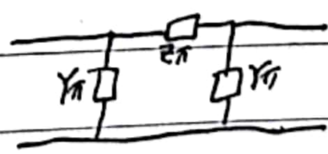
(负载电感)

⑩ 均匀线的集中参数等效电路　　(传输参数)

$$\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\gamma l & Z_c\sinh\gamma l\\ \frac{\sinh\gamma l}{Z_c} & \cosh\gamma l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_2\\ \dot I_2\end{bmatrix}$$

均匀传输线一定是对称的，所以等效电路模型 T形 π形也对称





$$\begin{cases}Y_T=\frac{1}{Z_c}\sinh\gamma l\\ Z_T=\frac{\cosh\gamma l-1}{\sinh\gamma l}Z_c\end{cases}$$

$$\begin{cases}Y_\pi=\frac{\cosh\gamma l-1}{Z_c\sinh\gamma l}\\ Z_\pi=Z_c\sinh\gamma l\end{cases}$$

$$\beta=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$$